

ANNALES
HENRI LEBESGUE

STÉPHANE LAMY

PIOTR PRZYTYCKI

PRESQU'UN IMMEUBLE POUR LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES MODÉRÉS

ALMOST A BUILDING FOR THE TAME AUTOMORPHISM GROUP

RÉSUMÉ. — Inspirés par l'immeuble de Bruhat–Tits du groupe $SL_n(\mathbb{F})$, pour \mathbb{F} un corps valué, nous construisons un espace métrique complet \mathbf{X} sur lequel agit le groupe $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ des automorphismes modérés de l'espace affine. Les points de \mathbf{X} sont certaines valuations monomiales, et \mathbf{X} admet une structure naturelle de CW-complexe euclidien de dimension $n - 1$. Quand $n = 3$, et pour \mathbb{k} de caractéristique zéro, nous prouvons que \mathbf{X} est localement $\text{CAT}(0)$ et simplement connexe, et par conséquent \mathbf{X} est un espace $\text{CAT}(0)$. En application nous obtenons la linéarisabilité des sous-groupes finis de $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$.

ABSTRACT. — Inspired by the Bruhat–Tits building of $SL_n(\mathbb{F})$, for \mathbb{F} a field with a valuation, we construct a complete metric space \mathbf{X} with an action of the tame automorphism group of the affine space $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$. The points in \mathbf{X} are certain monomial valuations, and \mathbf{X} admits a natural structure of Euclidean CW-complex of dimension $n - 1$. When $n = 3$, and for \mathbb{k} of characteristic zero, we prove that \mathbf{X} is locally $\text{CAT}(0)$ and simply connected, hence \mathbf{X} is a $\text{CAT}(0)$ space. As an application we obtain the linearizability of finite subgroups in $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$.

Mots-clés : automorphisme modéré, valuation, espace $\text{CAT}(0)$.

Classification Mathématique (2020) : 14R10, 20F67, 51E24.

DOI : <https://doi.org/10.5802/ahl.83>

(*) S.L. partiellement supporté par le projet “BirPol” ANR-11-JS01-004-01 et par le CRM, UMI CNRS Montréal. P.P. partiellement supporté par NSERC, FRQNT, et National Science Centre, Poland, UMO-2015/18/M/ST1/00050.

1. Introduction

Soit \mathbb{k} un corps, et $n \geq 2$. On note $\text{Aut}(\mathbb{k}^n)$ le groupe des automorphismes polynomiaux de l'espace affine de dimension n sur \mathbb{k} . Un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) étant fixé, un élément $g \in \text{Aut}(\mathbb{k}^n)$ s'écrit

$$g: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (g_1, \dots, g_n)$$

où les g_i sont des polynômes en les x_i , et l'inverse de g admet une écriture de la même forme.

Le groupe $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ des *automorphismes modérés* de l'espace affine est le sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{k}^n)$ engendré par le groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ et par les automorphismes élémentaires, ou « transvections polynomiales », de la forme

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + P(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Nous étudions la structure du groupe modéré, en particulier en dimension $n = 3$ et sur un corps de base \mathbb{k} de caractéristique nulle. Après avoir obtenu l'existence de nombreux sous-groupes normaux dans [LP19], nous nous intéressons dans le présent travail à la question de la classification de ses sous-groupes finis à conjugaison près. Notre motivation à long terme est d'établir un panorama des propriétés que l'on peut attendre du groupe entier des automorphismes polynomiaux, voire même du groupe de Cremona, qui est le groupe des transformations birationnelles (et non plus seulement bipolynomiales) de l'espace affine. Nous renvoyons aux introductions de [BFL14] et [LP19] pour plus de détails sur l'articulation entre ces différents groupes, et un historique des développements récents. Nous nous concentrons dans cette introduction sur les aspects spécifiques à ce travail.

Un sous-groupe G de $\text{Aut}(\mathbb{k}^n)$ est dit *linéarisable* s'il existe une *linéarisante* $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{k}^n)$ tel que $\varphi G \varphi^{-1} \subset \text{GL}_n(\mathbb{k})$. Il est connu que, pour un corps \mathbb{k} de caractéristique nulle, tout sous-groupe fini G de $\text{Aut}(\mathbb{k}^2)$ est linéarisable. Rappelons l'argument, qui se résume simplement, et qui servira de modèle pour passer en dimension 3. On considère l'action de G sur l'arbre de Bass–Serre associé à la structure de produit amalgamé pour $\text{Tame}(\mathbb{k}^2) = \text{Aut}(\mathbb{k}^2)$ (c'est le théorème de Jung–van der Kulk, voir par exemple [Lam02]). Celle-ci admet toujours au moins un point fixe, ainsi G est conjugué à un sous-groupe de l'un des facteurs du produit amalgamé. Finalement, les sous-groupes finis de ces deux facteurs sont linéarisables par un critère de moyennisation général, voir lemme 8.1. En dimension plus grande, l'arbre de Bass–Serre se généralise en un complexe simplicial \mathcal{C}_n de dimension $n - 1$ sur lequel le groupe modéré agit avec pour domaine fondamental un simplexe. C'est ce complexe \mathcal{C}_3 que nous avons utilisé dans notre précédent travail [LP19] pour obtenir l'hyperbolicité acylindrique, qui implique en particulier l'existence de sous-groupes normaux dans $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ [DGO17]. C'est également avec une variante de cette construction qu'a été établi dans [BFL14] un résultat analogue de linéarisation des sous-groupes finis pour le groupe $\text{Tame}(V)$ des automorphismes modérés d'une quadrique affine $V \subset \mathbb{k}^4$. Dans ce dernier contexte, le complexe sur lequel agit naturellement $\text{Tame}(V)$ est un complexe carré $\text{CAT}(0)$, cette propriété de courbure négative ou nulle assurant l'existence d'un point fixe global pour toute action de groupe fini. Pour étendre ces résultats au groupe $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$, le problème que nous

avons dû contourner est que l'étude du link des sommets montre que les triangles de \mathcal{C}_3 ne peuvent pas être munis d'une structure euclidienne équivariante qui en fasse un espace $\text{CAT}(0)$. Soulignons également que bien que \mathcal{C}_3 soit un complexe contractile de dimension 2 [LP19, Theorem A], à notre connaissance cela reste une question ouverte de savoir si cela implique l'existence d'un point fixe pour toute action d'un groupe fini (voir [OS02, p. 205]).

Dans le présent article, nous introduisons un nouvel espace \mathbf{X}_n sur lequel agit le groupe modéré $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ (section 2). L'espace \mathbf{X}_n , dont les points sont certaines valuations monomiales modulo homothétie, est lui aussi un CW-complexe dont les cellules sont des régions euclidiennes (mais en général pas des polyèdres) de dimension au plus $n - 1$, et sa construction est inspirée de l'immeuble de Bruhat–Tits de $\text{SL}_n(\mathbb{F})$, pour \mathbb{F} un corps valué. Une propriété agréable de l'espace \mathbf{X}_n est que les stabilisateurs pour l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ sont conjugués à des produits semi-directs $M \rtimes L$ avec M un sous-groupe d'automorphismes triangulaires stables par moyenne et L un sous-groupe du groupe linéaire (proposition 3.2), ce qui par le critère général de linéarisation déjà mentionné permet d'obtenir que tout sous-groupe fini d'un tel stabilisateur est linéarisable. Reste alors à montrer que tout groupe fini agit sur l'espace \mathbf{X}_n avec un point fixe global. Comme dans les exemples mentionnés plus haut, ceci découle automatiquement une fois que l'on a pu munir \mathbf{X}_n d'une distance qui en fait un espace $\text{CAT}(0)$ complet, en considérant le « circumcenter » d'une orbite quelconque. La construction d'une telle distance est le résultat principal de cet article.

Tout d'abord en dimension $n \geq 2$ quelconque et sur un corps \mathbb{k} arbitraire nous construisons \mathbf{X}_n comme le quotient d'une union de copies de l'espace euclidien \mathbb{R}^{n-1} , que nous appelons appartements. Nous montrons que la pseudo-distance quotient induite est une distance, qui fait de \mathbf{X}_n un espace de longueur complet (proposition 5.4 et lemme 5.8). Ensuite, restreignant l'étude au cas $n = 3$ et au cas d'un corps \mathbb{k} de caractéristique nulle, nous montrons que \mathbf{X}_3 est simplement connexe (proposition 6.3). Ici la restriction sur la caractéristique de \mathbb{k} vient de la théorie des réductions de Shestakov–Umirbaev et Kuroda, dont une conséquence fameuse est l'inclusion stricte $\text{Tame}(\mathbb{k}^3) \subsetneq \text{Aut}(\mathbb{k}^3)$, mais que nous utilisons ici seulement au travers de la description de $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ comme un produit amalgamé de trois facteurs le long de leurs intersections respectives. Enfin, en nous appuyant sur l'étude des intersections entre appartements (section 4) nous montrons que \mathbf{X}_3 est localement $\text{CAT}(0)$ (proposition 7.1). Finalement, par le théorème de Cartan–Hadamard on conclut (voir section 8) :

THÉORÈME 1.1. — *Sur un corps \mathbb{k} de caractéristique nulle, l'espace \mathbf{X}_3 est un espace métrique complet $\text{CAT}(0)$.*

En corollaire, suivant la stratégie exposée plus haut nous obtenons :

COROLLAIRE 1.2. — *Sur un corps \mathbb{k} de caractéristique nulle, tout sous-groupe fini de $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ est linéarisable.*

Précisons que dans ce corollaire la linéarisante obtenue sera dans $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$.

En dimension $n = 2$ la construction précédente produit un arbre \mathbf{X}_2 qui est non isométrique (et même non isomorphe de manière équivariante) à l'arbre de Bass–Serre de $\text{Aut}(\mathbb{k}^2)$, ce qui était une première indication que ce complexe contient potentiellement des informations nouvelles sur le groupe modéré. Concernant la possibilité de généraliser nos résultats en dimension plus grande, rappelons tout d'abord qu'il existe des sous-groupes finis non linéarisables dans $\text{Aut}(\mathbb{k}^4)$. Par exemple, suivant [FMJ02], si \mathbb{k} contient 3 racines cubiques de l'unité, $1, \omega$ et ω^{-1} , alors l'action sur \mathbb{k}^4 du groupe symétrique $S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 = 1 \rangle$ définie comme suit est non linéarisable :

$$\begin{aligned}\sigma(a, b, x, y) &= (\omega a, \omega^{-1} b, x, y), \\ \tau(a, b, x, y) &= (b, a, -b^3 x + (1 + ab + a^2 b^2) y, (1 - ab)x + a^3 y).\end{aligned}$$

On peut soupçonner que τ est un automorphisme non modéré, mais ceci relève de la question ouverte de savoir si l'inclusion $\text{Tame}(\mathbb{k}^n) \subset \text{Aut}(\mathbb{k}^n)$ est stricte en dimension $n \geq 4$. En revanche, comme τ après composition par l'involution $(a, b, x, y) \mapsto (b, a, y, x)$ s'identifie à un élément de $\text{SL}_2(\mathbb{k}[a, b])$, il est connu grâce à [Sus77] que cet exemple devient modéré après extension à \mathbb{k}^5 , en étendant trivialement l'action sur la variable supplémentaire. En effet, Suslin prouve que pour tout $r \geq 3$, le groupe $\text{SL}_r(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n])$, que l'on peut penser comme un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{k}^{r+n})$, est engendré par les matrices élémentaires, qui sont des automorphismes modérés particuliers. Mentionnons que cette propriété d'être « stablement modéré », c'est-à-dire modéré après extension triviale à quelques variables supplémentaires, n'est pas valable seulement pour les automorphismes dépendant linéairement d'une partie des variables : par [BvdEW12, Theorem 4.10], tout automorphisme polynomial en les deux variables x, y et à coefficients dans l'anneau $\mathbb{k}[a, b]$ devient modéré après extension à \mathbb{k}^6 . Par ailleurs, toujours suivant [FMJ02], l'exemple précédent reste non-linéarisable dans $\text{Aut}(\mathbb{k}^{4+m})$, si l'on prolonge trivialement l'action de S_3 à un nombre m quelconque de variables supplémentaires. En combinant avec le résultat de Suslin, pour tout $n \geq 5$ on obtient donc un sous-groupe fini non linéarisable de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$; autrement dit le corollaire 1.2, et donc également le théorème 1.1, ne sont plus valables en dimension $n \geq 5$. Il serait cependant intéressant d'étudier si l'un des deux ingrédients de la propriété CAT(0) persiste, à savoir la simple connexité ou la propriété CAT(0) locale. Enfin, le cas de la dimension $n = 4$ reste ouvert, mais semble difficile en l'absence d'une théorie des réductions.

L'espace \mathbf{X}_n est construit en considérant l'orbite sous l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ de l'ensemble des valuations monomiales associées au système de coordonnées x_1, \dots, x_n . On pourrait tout aussi bien considérer l'action du groupe $\text{Aut}(\mathbb{k}^n)$, et obtenir un espace plus grand sur lequel agit le groupe entier des automorphismes polynomiaux. Le point est que ce nouvel espace n'est plus connexe, et la composante connexe contenant les valuations monomiales initiales est précisément notre espace \mathbf{X}_n . Nous avons fait le choix de nous restreindre dès le départ à l'action du groupe modéré, cependant le lecteur intéressé pourra vérifier que la plupart des énoncés généraux (en particulier dans les sections 2 et 3) resteraient valables pour le groupe $\text{Aut}(\mathbb{k}^n)$, avec une preuve inchangée.

Nous voyons l'espace \mathbf{X}_n muni de l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ comme un analogue de l'immeuble affine de Bruhat–Tits associé à $\text{SL}_n(\mathbb{F})$, pour \mathbb{F} un corps valué. Nous avons en tête la construction via les normes ultramétriques (voir [BT84, Par00]), où un appartement est associé à chaque base de \mathbb{F}^n en faisant varier la pondération des normes ultramétriques associées. Dans notre situation on peut voir chaque $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ comme donnant une base de \mathbb{k} -algèbre de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{k}[f_1, \dots, f_n]$, et lui associer une collection \mathbf{E}_f de valuations monomiales naturellement paramétrée par un espace euclidien \mathbb{R}^{n-1} , que nous appelons l'appartement associé à f . Une autre similitude est que chaque tel appartement contient une valuation particulière (celle dont tous les poids sont égaux), dont un voisinage dans \mathbf{X}_n est isométrique au cône sur l'immeuble sphérique associé à $\text{GL}_n(\mathbb{k})$. Cependant, comme nous le montrons dans l'appendice 9.3, pour $n \geq 3$ l'espace \mathbf{X}_n n'est pas la réalisation de Davis [AB08, Définition 12.65] d'un immeuble, car la propriété cruciale « par deux points passe un appartement » [AB08, Définition 4.1 (B1)] est mise en défaut, même localement. Mentionnons également que tout élément dans le stabilisateur d'un appartement \mathbf{E}_f agit sur celui-ci comme une matrice de permutation, et jamais comme une translation comme on aurait pu l'anticiper. En particulier un domaine fondamental pour l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ sur \mathbf{X}_n est une chambre de Weyl entière, et donc n'est pas compact (corollaire 2.5(ii)). Il n'est pas clair pour nous si certaines notions affaiblies d'immeuble (par exemple les « mesures » de Gaussent et Rousseau [GR08]) pourraient englober notre construction.

Par définition \mathbf{X}_n est inclus dans l'espace de toutes les valuations sur l'anneau $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, étudiés en particulier dans de précédents travaux par Boucksom, Favre et Jonsson [BFJ08, FJ07]. Ces auteurs étudient principalement l'espace des valuations centrées à l'origine, mais le cas des valuations centrées à l'infini est similaire, et est traité en détail dans le cas $n = 2$ dans [FJ07, Appendix A]. En particulier notre arbre \mathbf{X}_2 est un sous-arbre de l'arbre \mathcal{V}_1 introduit dans [FJ07, §A.3], mais avec des choix de normalisation différents. Le cas de la dimension n quelconque est traité dans [BFJ08], et une structure affine simpliciale est mise en évidence qui en restriction à l'espace \mathbf{X}_n correspond à nos appartements. Il serait intéressant d'explorer les relations entre les propriétés de l'espace de toutes les valuations et celles du sous-espace \mathbf{X}_n que nous considérons dans cet article.

Une autre question naturelle serait de comprendre les axes des isométries loxodromiques sur \mathbf{X}_3 . Une telle étude pourrait déboucher sur une alternative de Tits pour $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$, ou sur une compréhension des propriétés dynamiques des éléments de $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$, comme la croissance des degrés sous itération.

Remerciements

L'inspiration initiale de ce projet vient d'un mini-cours sur les immeubles euclidiens donné par Anne Parreau en août 2015 à Nancy, dans le cadre de la conférence Non-Positive Curvature & Infinite Dimension, à laquelle participait le premier auteur. Merci à Anne Parreau pour ces lumineux exposés, à Junyi Xie pour de nombreuses

discussions sur les valuations, et à Pierre-Marie Poloni qui nous a indiqué la référence [BvdEW12]. Nous remercions également les rapporteurs dont les suggestions nous ont permis d'améliorer la présentation de l'article.

2. Espace de valuations

2.1. Valuations

Une *valuation* sur l'anneau $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ est une fonction

$$\nu: \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

telle que, pour tous polynômes P_1, P_2 :

- $\nu(P_1 + P_2) \geq \min\{\nu(P_1), \nu(P_2)\}$;
- $\nu(P_1 P_2) = \nu(P_1) + \nu(P_2)$;
- $\nu(P) = 0$ pour tout polynôme P constant et non nul ;
- $\nu(P) = +\infty$ si et seulement si $P = 0$.

On note \mathcal{V}_n l'ensemble des classes de telles valuations, modulo homothétie par un réel positif. Si $P \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ est un polynôme et $g = (g_1, \dots, g_n) \in \text{Aut}(\mathbb{k}^n)$ est un automorphisme, on note g^*P le polynôme $P(g_1, \dots, g_n)$. Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{k}^n)$ agit (à gauche) sur l'ensemble des valuations via la formule :

$$(g \cdot \nu)(P) := \nu(g^*(P)).$$

Cette action commute avec les homothéties, on obtient ainsi une action de $\text{Aut}(\mathbb{k}^n)$ sur \mathcal{V}_n .

Nous décrivons maintenant certaines *valuations monomiales* formant un sous-ensemble de \mathcal{V}_n . Nous notons Π le quadrant positif de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire

$$\Pi = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n; \alpha_i > 0 \text{ pour tout } i\}.$$

Nous dirons que Π est l'*espace des poids*. On définit également le sous-espace des poids bien ordonnés

$$\Pi^+ = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n); \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n > 0\} \subset \Pi.$$

Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Pi$, nous notons $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, ou simplement $[\alpha]$, la classe de α modulo homothétie par un réel positif, et nous notons ∇ la projectivisation de Π , qui est un simplexe ouvert de dimension $n - 1$. De même $\nabla^+ \subset \nabla$ désignera le simplexe semi-ouvert qui est la projectivisation de Π^+ . On équipe ∇ et ∇^+ de la topologie induite par $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. En particulier, nous dirons qu'un poids $[\alpha] \in \nabla^+$ vérifiant $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ est à l'intérieur de ∇^+ , et au contraire que $[\alpha]$ est dans la frontière de ∇^+ s'il existe deux indices $i > j$ tel que $\alpha_i = \alpha_j$. Il sera souvent utile de prolonger ces définitions pour inclure des poids avec certains coefficients nuls (mais pas tous), qu'on appellera le *bord à l'infini* de ∇ .

Étant donné un poids $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Pi$, on définit une valuation monomiale $\nu_{\text{id}, \alpha}$ comme suit. Pour tout

$$P = \sum_{I=(i_1, \dots, i_n)} c_I x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n],$$

on appelle support de P , noté $\text{Supp } P$, l'ensemble des multi-indices I tels que $c_I \neq 0$, et l'on pose :

$$\nu_{\text{id},\alpha}(P) = \min_{I \in \text{Supp } P} \left(- \sum_{k=1}^n \alpha_k i_k \right).$$

Autrement dit $-\nu_{\text{id},\alpha}(P)$ est le degré pondéré de P , où chaque variable x_i est affectée du poids α_i . Nous avons adopté le point de vue des valuations dans un souci de compatibilité avec des travaux existants, en particulier [FJ07].

Observons que pour tout poids $\alpha \in \Pi$ et tout $t > 0$, on a $t\nu_{\text{id},\alpha} = \nu_{\text{id},t\alpha}$. Ainsi la classe d'homothétie de $\nu_{\text{id},\alpha}$ ne dépend que de $[\alpha] \in \nabla$, et on la note $\nu_{\text{id},[\alpha]} \in \mathcal{V}_n$. Nous notons \mathbf{E}_{id} (resp. \mathbf{E}_{id}^+) l'ensemble de toutes les classes $\nu_{\text{id},[\alpha]}$ avec $[\alpha] \in \nabla$ (resp. $[\alpha] \in \nabla^+$). Nous définissons alors l'espace $\mathbf{X}_n \subset \mathcal{V}_n$ (ou simplement \mathbf{X} si la dimension est claire par contexte) comme l'orbite de \mathbf{E}_{id} sous l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$. Si $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Pi$, nous noterons

$$\nu_{f,\alpha} := f \cdot \nu_{\text{id},\alpha}.$$

Explicitement, en notant $f^{-1} = (g_1, \dots, g_n)$, la valuation $\nu_{f,\alpha}$ est caractérisée par la propriété : $\nu_{f,\alpha}(g_i) = \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En effet $\nu_{f,\alpha}(g_i) = f \cdot \nu_{\text{id},\alpha}(g_i) = \nu_{\text{id},\alpha}(g_i \circ f) = \nu_{\text{id},\alpha}(x_i)$. À nouveau, la classe d'homothétie de $\nu_{f,\alpha}$ ne dépend que de $[\alpha] \in \nabla$, et on la note $\nu_{f,[\alpha]}$.

On identifie le groupe symétrique S_n à un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{k})$, et donc aussi de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, via l'action par permutation sur les vecteurs de la base canonique de \mathbb{k}^n . En termes de coordonnées cela équivaut à poser, pour tout $\sigma \in S_n$:

$$\sigma = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n).$$

Ainsi, pour tous $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ et $P \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, on a

$$\sigma^* P = P(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n].$$

De même, le groupe symétrique agit sur Π par

$$\sigma(\alpha) = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)}).$$

LEMME 2.1. — Pour tous $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, $\alpha \in \Pi$, $\sigma \in S_n$, on a

$$\nu_{f\sigma,\alpha} = \nu_{f,\sigma(\alpha)}.$$

Démonstration. — La vérification est directe :

$$\begin{aligned} \nu_{f\sigma,\alpha}(P) &= \nu_{\text{id},\alpha}((f\sigma)^*(P)) = \nu_{\text{id},\alpha}(\sigma^*(f^*P)) = \nu_{\text{id},\alpha}(f^*P(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})) \\ &= \nu_{\text{id},\sigma(\alpha)}(f^*P(x_1, \dots, x_n)) = \nu_{f,\sigma(\alpha)}(P). \quad \square \end{aligned}$$

Remarque 2.2. — La preuve précédente est élémentaire, mais en pratique la présence des σ^{-1} peut facilement mener à des erreurs. On pourra en particulier se convaincre de la quatrième égalité en considérant l'exemple $f = \text{id}, \sigma = (123)$. Il s'agit de vérifier

$$\nu_{\text{id},(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(P(x_3, x_1, x_2)) = \nu_{\text{id},(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2)}(P(x_1, x_2, x_3)).$$

Pour $P = x_1, P = x_2$ et $P = x_3$ ces valuations monomiales prennent respectivement les valeurs α_3, α_1 et α_2 , on en déduit qu'elles coïncident sur tout $\mathbb{k}[x_1, x_2, x_3]$.

2.2. Appartements

Pour tout $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, nous appelons *appartement* associé à f l'ensemble

$$\mathbf{E}_f := f(\mathbf{E}_{\text{id}}) = \left\{ \nu_{f, [\alpha]}; [\alpha] \in \nabla \right\} \subset \mathbf{X}.$$

En particulier \mathbf{E}_{id} sera appelé l'*appartement standard*. De façon similaire nous appelons *chambre* associée à f l'ensemble

$$\mathbf{E}_f^+ := f(\mathbf{E}_{\text{id}}^+) = \left\{ \nu_{f, [\alpha]}; [\alpha] \in \nabla^+ \right\} \subset \mathbf{E}_f,$$

et nous appelons \mathbf{E}_{id}^+ la *chambre standard*. Le lemme 2.1 entraîne que l'appartement \mathbf{E}_f associé à f est la réunion des $n!$ chambres $\mathbf{E}_{f\sigma}^+$, où $\sigma \in S_n$ est une permutation.

Pour tout poids $\alpha \in \Pi$, il existe un unique $\alpha^+ \in \Pi^+$ obtenu en réordonnant les α_i . Cette application descend aux projectivisés en une application

$$[\alpha] \in \nabla \mapsto [\alpha]^+ := [\alpha^+] \in \nabla^+.$$

Nous noterons $\alpha^+ = (\alpha_1^+, \dots, \alpha_n^+)$ les coordonnées de α^+ , en particulier

$$\alpha_1^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \quad \text{et} \quad \alpha_n^+ = \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$$

LEMME 2.3. — Soient ℓ_1, \dots, ℓ_n des formes linéaires indépendantes sur \mathbb{k}^n , et $\nu = \nu_{\text{id}, \alpha}$ pour un poids $\alpha \in \Pi$. Alors

$$-\nu(\ell_1) - \dots - \nu(\ell_n) \geq \alpha_1^+ + \dots + \alpha_n^+.$$

Démonstration. — Soit $\sigma \in S_n$ tel que $\alpha_j^+ = \alpha_{\sigma(j)}$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Pour une forme linéaire $\ell = \sum_{j=1}^n a_{\sigma(j)} x_{\sigma(j)}$, on a $-\nu(\ell) = \max\{\alpha_j^+ \mid a_{\sigma(j)} \neq 0\}$. Donc si $-\nu(\ell) = \alpha_k^+$, ℓ ne dépend que des variables $x_{\sigma(k)}, \dots, x_{\sigma(n)}$. Maintenant si ℓ_1, \dots, ℓ_n sont indépendantes, elles ne peuvent pas toutes ne dépendre que des variables $x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}$, et donc il existe un indice $i \leq j \leq n$ tel que $-\nu(\ell_j) \geq \alpha_i^+$. On conclut par récurrence sur le nombre de formes linéaires. \square

Observons que l'inégalité peut être stricte dans le lemme 2.3. Par exemple en dimension 2, si $\ell_1 = x_1$, $\ell_2 = x_1 + x_2$ et $\alpha = (2, 1)$, on a

$$-\nu(\ell_1) - \nu(\ell_2) = 2 + 2 > 2 + 1 = \alpha_1^+ + \alpha_2^+.$$

PROPOSITION 2.4. — Soit $f, g \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, et $\alpha, \beta \in \Pi$. Si $\nu_{f, \alpha} = \nu_{g, \beta}$, alors $\alpha^+ = \beta^+$.

Démonstration. — Étant donnée une valuation $\nu = \nu_{f, \alpha} \in \mathbf{X}$, on définit par récurrence descendante une suite γ_i en posant, pour $i = n, n-1, \dots, 1$:

$$\gamma_i := \inf(-\nu(h_i h_{i+1} \dots h_n)) - \sum_{j=i+1}^n \gamma_j,$$

où l'infimum est pris sur les (h_i, \dots, h_n) qui sont $n-i+1$ composantes distinctes d'un $h = (h_1, \dots, h_n) \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$. Nous allons voir que $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\alpha_1^+, \dots, \alpha_n^+)$, ce qui montrera que $\alpha^+ = \gamma$ est intrinsèquement défini.

Observons d'abord que l'on peut supposer $f = \text{id}$, car $\nu_{\text{id}, \alpha} = f^{-1} \cdot \nu_{f, \alpha}$ et la définition de γ est par construction invariante sous l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$. Supposons

que $\gamma_j = \alpha_j^+$ pour $j = i + 1, \dots, n$ (ce qui correspond à une condition vide dans le cas $i = n$), et montrons que c'est aussi le cas pour $j = i$. Par définition

$$\gamma_i = \inf(-\nu(h_i h_{i+1} \dots h_n)) - \alpha_{i+1}^+ - \dots - \alpha_n^+.$$

Pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ les parties linéaires des polynômes h_i, \dots, h_n sont des formes indépendantes, car sinon h ne serait pas inversible. Par le lemme 2.3, on a

$$-\nu(h_i h_{i+1} \dots h_n) = -\nu(h_i) - \dots - \nu(h_n) \geq \alpha_i^+ + \dots + \alpha_n^+$$

et l'égalité est réalisée pour $h \in S_n$ une permutation telle que $h(\alpha) = \alpha^+$. On conclut que $\gamma_i = \alpha_i^+$. □

Nous dégageons trois conséquences immédiates :

COROLLAIRE 2.5. —

- (i) Il existe une application bien définie $\rho_+ : \mathbf{X} \rightarrow \nabla^+$, qui envoie $\nu_{f, [\alpha]}$ sur $[\alpha]^+$, et qui est donc une bijection en restriction à chaque chambre \mathbf{E}_f^+ .
- (ii) La chambre standard \mathbf{E}_{id}^+ est un domaine fondamental pour l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ sur \mathbf{X} , c'est-à-dire toute orbite rencontre \mathbf{E}_{id}^+ en exactement un point.
- (iii) Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Pi^+$ et $f = (f_1, \dots, f_n) \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$. Si $f \cdot \nu_{\text{id}, [\alpha]} = \nu_{\text{id}, [\alpha]}$, alors $f \cdot \nu_{\text{id}, \alpha} = \nu_{\text{id}, \alpha}$.

Démonstration. — Explicitons l'argument pour (iii) : si $f \cdot \nu_{\text{id}, [\alpha]} = \nu_{\text{id}, [\alpha]}$ alors $\nu_{f, \alpha} = f \cdot \nu_{\text{id}, \alpha} = \nu_{\text{id}, t\alpha}$ pour un certain réel $t > 0$. La proposition 2.4 donne $\alpha^+ = t\alpha^+$, d'où $t = 1$. □

Remarque 2.6. — Pour chaque appartement \mathbf{E}_f et chaque choix de $\sigma \in S_n$, on a une application

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f &\mapsto \nabla \\ \nu_{f\sigma, [\alpha]} &\rightarrow [\alpha] \end{aligned}$$

Cependant il n'est pas possible de faire des choix cohérents qui permettraient d'étendre cette application à \mathbf{X} .

Par exemple, en dimension $n = 2$, il n'est déjà pas possible d'étendre cette application à l'union des trois appartements $\mathbf{E}_{\text{id}} \cup \mathbf{E}_f \cup \mathbf{E}_g$ pour $f = (x_2, x_1 + x_2)$ et $g = (x_1 + x_2, x_1)$. Intuitivement, cela vient du fait que ces appartements forment un « tripode ». Formellement, chacun de ces appartements contient deux parmi les trois valuations suivantes :

$$\nu_{\text{id}, [1,2]} = \nu_{f, [2,1]}, \quad \nu_{f, [1,2]} = \nu_{g, [2,1]}, \quad \nu_{g, [1,2]} = \nu_{\text{id}, [2,1]},$$

et chacune devrait être envoyée sur $[1, 2]$ ou $[2, 1]$. Cependant, il n'existe pas d'application depuis un ensemble de cardinalité 3 vers un ensemble de cardinalité 2 qui soit injective sur chaque paire.

On proposera dans le lemme 3.5 un remède partiel à cet état de fait.

Nous noterons $\text{Fix}(f)$ le sous-ensemble de \mathbf{X} fixé par f . Puisque nous ne considérons jamais les points fixes de f comme automorphisme de l'espace affine \mathbb{k}^n , cette notation ne devrait pas porter à confusion.

COROLLAIRE 2.7. — Soit $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ et $\text{Fix}(f) \subset \mathbf{X}$ son ensemble de points fixes. Alors

$$\mathbf{E}_f^+ \cap \mathbf{E}_{\text{id}}^+ = \text{Fix}(f) \cap \mathbf{E}_{\text{id}}^+.$$

Démonstration. — Si $\nu_{\text{id}, [\alpha]} \in \text{Fix}(f) \cap \mathbf{E}_{\text{id}}^+$, on a

$$\nu_{f, [\alpha]} = f(\nu_{\text{id}, [\alpha]}) = \nu_{\text{id}, [\alpha]} \in \mathbf{E}_f^+ \cap \mathbf{E}_{\text{id}}^+.$$

Réciproquement tout point $\nu_{f, [\alpha]} = \nu_{\text{id}, [\beta]} \in \mathbf{E}_f^+ \cap \mathbf{E}_{\text{id}}^+$ vérifie $[\alpha] = [\alpha]^+ = [\beta]^+ = [\beta]$, où la deuxième égalité est la proposition 2.4. On a donc $f(\nu_{\text{id}, [\alpha]}) = \nu_{f, [\alpha]} = \nu_{\text{id}, [\alpha]}$, autrement dit $\nu_{\text{id}, [\alpha]} \in \text{Fix}(f) \cap \mathbf{E}_{\text{id}}^+$ comme attendu. \square

D’après le corollaire 2.7, afin de décrire les intersections entre chambres il faut comprendre les lieux $\text{Fix}(f) \cap \mathbf{E}_{\text{id}}^+$, ce que nous allons faire dans les deux sections qui suivent.

3. Stabilisateurs

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Pi^+$. Nous allons déterminer le stabilisateur $\text{Stab}(\nu_{\text{id}, [\alpha]})$ de la classe $\nu_{\text{id}, [\alpha]}$ pour l’action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ sur \mathbf{X} . Le groupe des *automorphismes triangulaires*, qui est un sous-groupe de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, jouera ici un rôle important. Rappelons qu’un automorphisme est dit triangulaire s’il est de la forme

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_1x_1 + P_1(x_2, \dots, x_n), \dots, a_i x_i + P_i(x_{i+1}, \dots, x_n), \dots, a_n x_n + c).$$

Écrivons

$$\alpha = (\underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_1}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\gamma_r, \dots, \gamma_r}_{m_r \text{ fois}})$$

avec $\gamma_1 > \dots > \gamma_r > 0$, on a donc $\sum_{i=1}^r m_i = n$. Nous définissons maintenant deux sous-groupes L_α et M_α de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, dont on vérifie immédiatement que ce sont des sous-groupes de $\text{Stab}(\nu_{\text{id}, [\alpha]})$.

Tout d’abord

$$L_\alpha \simeq \text{GL}_{m_1}(\mathbb{k}) \times \dots \times \text{GL}_{m_r}(\mathbb{k})$$

est le sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ des matrices diagonales par blocs de taille m_i . En particulier L_α contient le sous-groupe des matrices diagonales.

Pour tout indice $i = 1, \dots, n$, notons $1 \leq b(i) \leq r$ le numéro du bloc auquel appartient l’indice i , c’est-à-dire tel que $\alpha_i = \gamma_{b(i)}$. Nous définissons M_α comme le sous-groupe du groupe des automorphismes triangulaires de la forme

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + P_1, \dots, x_i + P_i, \dots, x_n + c),$$

où chaque P_i satisfait $\alpha_i \geq -\nu_\alpha(P_i)$ et ne dépend que des variables x_j avec $b(j) > b(i)$. En particulier M_α contient le sous-groupe des translations. À noter que les définitions de L_α et M_α ne dépendent que de la classe d’homothétie de α . Observer aussi que le groupe $\langle L_\alpha, M_\alpha \rangle$ contient toujours le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures.

Exemple 3.1. —

- (i) Si $\alpha = (1, \dots, 1)$, alors $L_\alpha = \text{GL}_n(\mathbb{k})$ et M_α est le groupe des translations.

- (ii) Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1 > \dots > \alpha_n$, alors L_α est le groupe des matrices diagonales, et M_α est le groupe des automorphismes triangulaires

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + P_1, \dots, x_i + P_i, \dots)$$

où les P_i satisfont $\alpha_i \geq -\nu_\alpha(P_i)$.

Remarquons qu'en dimension $n = 2$, les deux exemples précédents couvrent tous les cas possibles. En dimension $n = 3$, il y a deux autres possibilités (ici nous utilisons la notation $\deg P$ pour le degré ordinaire d'un polynôme P , c'est-à-dire chaque variable est affectée du poids 1) :

- (iii) Si $\alpha = (\alpha_1, 1, 1)$ avec $\alpha_1 > 1$, alors

$$L_\alpha = \{(ax_1, bx_2 + cx_3, b'x_2 + c'x_3)\} \subset \text{GL}_3(\mathbb{k}),$$

$$M_\alpha = \{(x_1 + P(x_2, x_3), x_2 + d, x_3 + d') ; \alpha_1 \geq \deg P\}.$$

- (iv) Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_1, 1)$ avec $\alpha_1 > 1$, alors

$$L_\alpha = \{(ax_1 + bx_2, a'x_1 + b'x_2, cx_3)\} \subset \text{GL}_3(\mathbb{k}),$$

$$M_\alpha = \{(x_1 + P(x_3), x_2 + Q(x_3), x_3 + d) ; \alpha_1 \geq \deg P, \deg Q\}.$$

PROPOSITION 3.2. — Soit $\nu_{\text{id}, [\alpha]} \in \mathbf{E}_{\text{id}}^+$. Alors le stabilisateur de $\nu_{\text{id}, [\alpha]}$ pour l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ sur \mathbf{X} est le produit semi-direct de M_α et L_α :

$$\text{Stab}(\nu_{\text{id}, [\alpha]}) = M_\alpha \rtimes L_\alpha.$$

Démonstration. — Considérons $f = (f_1, \dots, f_n) \in \text{Stab}(\nu_{\text{id}, [\alpha]})$. Grâce au corollaire 2.5 (iii), nous avons $f \in \text{Stab}(\nu_{\text{id}, \alpha})$. En composant par une translation, qui est un élément de M_α , nous pouvons supposer que les f_i n'ont pas de terme constant. Pour chaque indice i , nous écrivons $f_i = \ell_i + P_i$, avec ℓ_i linéaire et P_i dont tous les monômes sont de degré au moins 2. La condition

$$\alpha_i = -\nu_{\text{id}, \alpha}(x_i) = -(f \cdot \nu_{\text{id}, \alpha})(x_i) = -\nu_{\text{id}, \alpha}(\ell_i + P_i) \geq -\nu_{\text{id}, \alpha}(P_i)$$

implique que P_i ne dépend que des variables x_j vérifiant $\alpha_i > \alpha_j$. Donc en composant par un élément de M_α nous pouvons nous ramener au cas où tous les P_i sont nuls. On obtient ainsi un élément de $\text{GL}_n(\mathbb{k}) \cap \text{Stab}(\nu_{\text{id}, \alpha})$, qui doit être triangulaire par blocs de taille $m_i \times m_j$. En particulier, nous pouvons écrire une telle matrice comme la composée d'un élément de L_α et de $\text{GL}_n(\mathbb{k}) \cap M_\alpha$.

On conclut que $\text{Stab}(\nu_{\text{id}, [\alpha]}) = \langle M_\alpha, L_\alpha \rangle$. Par construction $M_\alpha \cap L_\alpha = \{\text{id}\}$, et le fait que M_α soit normalisé par L_α est un calcul immédiat. \square

COROLLAIRE 3.3. — Le stabilisateur dans $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ de la chambre standard \mathbf{E}_{id}^+ est le produit semi-direct du groupe des translations et du groupe des matrices triangulaires supérieures. En particulier, $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ fixe chaque point de \mathbf{E}_{id} si et seulement si f est de la forme

$$f = (c_1x_1 + t_1, c_2x_2 + t_2, \dots).$$

Démonstration. — Soit $f \in \text{Stab}(\mathbf{E}_{\text{id}}^+)$, et $\alpha \in \Pi^+$. Par le corollaire 2.5 (iii), on a $\nu_{f, \alpha} = f(\nu_{\text{id}, \alpha}) = \nu_{\text{id}, \beta}$ pour un certain $\beta \in \Pi^+$, et par la proposition 2.4, $\alpha = \alpha^+ = \beta^+ = \beta$. Autrement dit f fixe point par point les éléments de \mathbf{E}_{id}^+ . En particulier f fixe la valuation monomiale de poids $(1, \dots, 1)$, ce qui correspond à l'exemple 3.1 (i).

En composant par une translation, on peut donc supposer $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$. Si on considère ensuite α tel que $\alpha_1 > \dots > \alpha_n > 0$, alors $f \in \mathrm{Stab}(\nu_{\mathrm{id}, [\alpha]})$ et relève de l'exemple 3.1 (ii). Comme on vient de voir que f est linéaire, on obtient que f est triangulaire supérieure. Ainsi $\mathrm{Stab}(\mathbf{E}_{\mathrm{id}}^+)$ est le groupe affine triangulaire, et donc égal au produit semi-direct annoncé.

La deuxième assertion s'obtient en conjuguant par des éléments du groupe symétrique. \square

On peut utiliser le corollaire 3.3 pour démontrer la fidélité de l'action de $\mathrm{Tame}(\mathbb{k}^n)$ sur \mathbf{X} . On reporte la preuve à l'appendice (proposition 9.1) car cet énoncé n'est pas nécessaire pour la preuve du théorème 1.1.

Appelons *face* de ∇^+ le sous-ensemble de ∇^+ défini par un certain nombre d'égalités de la forme $\alpha_k = \alpha_{k+1}$. Une *face* de \mathbf{X} est un ensemble de valuations $\nu_{f, [\alpha]}$, pour $f \in \mathrm{Tame}(\mathbb{k}^n)$ fixé et $[\alpha]$ dans une face fixée de ∇^+ .

Soit Δ le poset des classes à gauche de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ par rapport aux sous-groupes paraboliques standards. Rappelons suivant [AB08, Définition 6.32] que Δ est l'immeuble sphérique $\Delta(G, B)$ pour $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ et B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures.

LEMME 3.4. — *Le poset des faces de \mathbf{X} contenant $\nu_{\mathrm{id}, [1, \dots, 1]}$ est isomorphe à Δ .*

Démonstration. — Par le corollaire 3.3 le sous-groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k}) \subset \mathrm{Stab}(\nu_{\mathrm{id}, [1, \dots, 1]})$ agit transitivement sur les faces de \mathbf{X} contenant $\nu_{\mathrm{id}, [1, \dots, 1]}$. De plus, par la proposition 3.2, les stabilisateurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ des faces de \mathbf{X} contenues dans $\mathbf{E}_{\mathrm{id}}^+$ sont les sous-groupes paraboliques standards de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$. Ainsi les faces de \mathbf{X} contenant $\nu_{\mathrm{id}, [1, \dots, 1]}$ correspondent aux classes à gauche de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ par rapport aux sous-groupes paraboliques standards. \square

Notons $\mathrm{Tame}_0(\mathbb{k}^n) \subset \mathrm{Tame}(\mathbb{k}^n)$ le sous-groupe des automorphismes modérés fixant l'origine de \mathbb{k}^n . Tout automorphisme $f \in \mathrm{Tame}(\mathbb{k}^n)$ s'écrit sous la forme $f = f_0 \circ t$, où $f_0 \in \mathrm{Tame}_0(\mathbb{k}^n)$ et t est la translation qui envoie $f^{-1}(0)$ sur 0. Par le corollaire 3.3, les translations fixent point par point l'appartement standard \mathbf{E}_{id} , donc on a $\mathbf{E}_f = \mathbf{E}_{f_0}$. Ainsi \mathbf{X} est couvert par les \mathbf{E}_{f_0} avec $f_0 \in \mathrm{Tame}_0(\mathbb{k}^n)$.

Soit $\mathrm{Diff} : \mathrm{Tame}_0(\mathbb{k}^n) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ la différentielle à l'origine, ou autrement dit l'homomorphisme qui oublie tous les termes de degré > 1 en x_1, \dots, x_n . Par ailleurs, pour chaque $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ la décomposition de Bruhat [Bou68, IV.2] donne un unique $\sigma_a \in S_n$ tel que $a \in B_n \sigma_a B_n$, où $B_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Pour chaque $f \in \mathrm{Tame}_0(\mathbb{k}^n)$, notons $\sigma_f := \sigma_{\mathrm{Diff}(f)}$.

LEMME 3.5. — (i) *L'application $\rho : \mathbf{X} \rightarrow \nabla$ qui a tout $\nu = \nu_{f, [\alpha]} \in \mathbf{X}$ avec $f \in \mathrm{Tame}_0(\mathbb{k}^n)$ et $\alpha \in \Pi^+$ associe $\rho(\nu) = [\sigma_f(\alpha)] \in \nabla$ est bien définie.*

(ii) *L'application ρ_+ du corollaire 2.5(i) factorise par ρ , au sens où le diagramme suivant commute (on suppose toujours $f \in \mathrm{Tame}_0(\mathbb{k}^n)$ et $\alpha \in \Pi^+$) :*

$$\begin{array}{ccc}
 \nu_{f, [\alpha]} \in \mathbf{X} & \xrightarrow{\rho_+} & \nabla^+ \ni [\alpha]^+ = [\sigma_f(\alpha)]^+ \\
 & \searrow \rho & \nearrow \\
 & [\sigma_f(\alpha)] \in \nabla &
 \end{array}$$

(iii) Soit $f \in \text{Tame}_0(\mathbb{k}^n)$ tel que $\text{Diff}(f) \in B_n$. Alors pour tout $\alpha \in \Pi$ on a $\rho(\nu_{f, [\alpha]}) = [\alpha]$.

Démonstration. —

(i) Soient $f, g \in \text{Tame}_0(\mathbb{k}^n)$ et $\alpha, \beta \in \Pi^+$ tel que $\nu_{f, [\alpha]} = \nu_{g, [\beta]}$. Par la proposition 2.4 on a $[\alpha] = [\beta]$. Il s'agit maintenant de montrer que $\sigma_g = \sigma_f \circ \sigma$ pour une permutation $\sigma \in S_n$ vérifiant $\sigma(\alpha) = \alpha$. Notons donc $\Sigma \subset S_n$ le sous-groupe des permutations fixant α . Observons que puisque $\alpha \in \Pi^+$, le groupe Σ est engendré par un sous-ensemble des générateurs standards $\sigma_i = (i, i + 1) \in S_n$.

Par la proposition 3.2, $f^{-1}g \in M_\alpha \rtimes L_\alpha$. Notons que $\text{Diff}(M_\alpha \cap \text{Tame}_0(\mathbb{k}^n)) \subset B_n$. De plus, en considérant une décomposition de Bruhat pour chaque bloc on obtient $L_\alpha \subset B_n \Sigma B_n$. Ainsi $\text{Diff}(g) \in \text{Diff}(f) B_n \Sigma B_n$, donc $\text{Diff}(g) \in B_n \sigma_f B_n \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k} B_n$, où les $\sigma_{i_j} \in \Sigma$ sont des générateurs standards. Par un des axiomes des systèmes de Tits (l'axiome (T3) dans [Bou68, IV.2]), il existe un sous-produit σ du produit $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k}$ tel que $\text{Diff}(g) \in B_n \sigma_f \sigma B_n$. Ainsi $\sigma_g = \sigma_f \sigma$, comme attendu.

(ii) Ce point est immédiat, puisque par définition pour tout poids α et toute permutation σ on a $[\alpha]^+ = [\sigma(\alpha)]^+$.

(iii) L'hypothèse $\text{Diff}(f) \in B_n$ implique $\sigma_f = \text{id}$. Étant donné $\alpha \in \Pi$, écrivons $\alpha = \sigma(\alpha^+)$ avec $\alpha^+ \in \Pi^+$, $\sigma \in S_n$. On a $\text{Diff}(f\sigma) = \text{Diff}(f)\sigma \in B_n \sigma$, et par conséquent $\sigma_{f\sigma} = \sigma$. Ainsi par le lemme 2.1,

$$\rho(\nu_{f, [\alpha]}) = \rho(\nu_{f, [\sigma(\alpha^+)]}) = \rho(\nu_{f\sigma, [\alpha^+]}) = [\sigma(\alpha^+)] = [\alpha],$$

comme attendu. □

COROLLAIRE 3.6. — Soit $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ tel que \mathbf{E}_f partage un point avec l'intérieur de \mathbf{E}_{id}^+ . Alors il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\mathbf{E}_f \cap \mathbf{E}_{\text{id}} = \text{Fix}(f\sigma) \cap \mathbf{E}_{\text{id}}$

Démonstration. — Quitte à composer f à droite par une translation, on peut supposer $f \in \text{Tame}_0(\mathbb{k}^n)$. Pour chaque $\sigma \in S_n$ on a $\mathbf{E}_f = \mathbf{E}_{f\sigma}$, d'où l'inclusion $\text{Fix}(f\sigma) \cap \mathbf{E}_{\text{id}} \subset \mathbf{E}_{f\sigma} \cap \mathbf{E}_{\text{id}} = \mathbf{E}_f \cap \mathbf{E}_{\text{id}}$. Pour la réciproque, par hypothèse il existe $[\alpha']$ à l'intérieur de ∇^+ avec $\nu_{\text{id}, [\alpha']} \in \mathbf{E}_f$. Par la proposition 2.4 et le lemme 2.1,

$$\nu_{\text{id}, [\alpha']} = \nu_{f, [\sigma(\alpha')]} = \nu_{f\sigma, [\alpha']}$$

pour un certain $\sigma \in S_n$. Par la proposition 3.2 et l'exemple 3.1 (ii), $\text{Diff}(f\sigma) \in B_n$, on peut donc appliquer le lemme 3.5 (iii) à $f\sigma$. Ainsi pour chaque $\nu = \nu_{f\sigma, [\alpha]} \in \mathbf{E}_f$ on a $\rho(\nu) = [\alpha]$. Si de plus $\nu \in \mathbf{E}_{\text{id}}$, de nouveau par le lemme 3.5 (iii) appliqué à id on a $\nu = \nu_{\text{id}, [\alpha]}$. Ainsi $\nu \in \text{Fix}(f\sigma)$ comme attendu. □

4. Points fixes

4.1. Équations admissibles

Nous dirons qu'un poids $\alpha \in \Pi$ satisfait une *équation admissible* s'il existe des entiers $m_j \geq 0$ non tous nuls et un indice i tel que

$$(4.1) \quad \alpha_i = \sum_{j \neq i} m_j \alpha_j.$$

Nous appelons *hyperplan admissible* associé à une telle équation l'ensemble des $\alpha \in \Pi$ vérifiant l'équation, et *demi-espace admissible* l'ensemble des α vérifiant l'inégalité

$$\alpha_i \geq \sum_{j \neq i} m_j \alpha_j.$$

En particulier, si l'équation admissible n'est pas de forme $\alpha_i = \alpha_k$, alors le demi-espace admissible est le demi-espace ne contenant pas $(1, \dots, 1)$. On utilisera également la terminologie d'*hyperplans* et de *demi-espaces admissibles* pour leurs projectivisations dans ∇ .

Par exemple, quand $n = 2$ les hyperplans admissibles de ∇ sont les points $[p, 1]$ et $[1, p]$, où $p \geq 1$ est entier, et les demi-espaces admissibles sont les intervalles semi-ouverts de $[p, 1]$ vers le point au bord à l'infini $[1, 0]$, ou de $[1, p]$ vers $[0, 1]$. Quand $n = 3$ les hyperplans admissibles dans ∇ sont des segments de droites que nous appellerons *droites admissibles* (voir figure 4.1).

Parmi les hyperplans admissibles, dans Π aussi bien que dans ∇ , nous appelons *hyperplan principal* tout hyperplan d'équation de la forme $\alpha_i = m_k \alpha_k$, pour des indices $i \neq k$. Autrement dit dans l'équation (4.1) nous demandons que tous les m_j sauf un soient nul. Géométriquement les hyperplans principaux dans ∇ sont exactement les hyperplans admissibles passant par $n - 2$ sommets du simplexe.

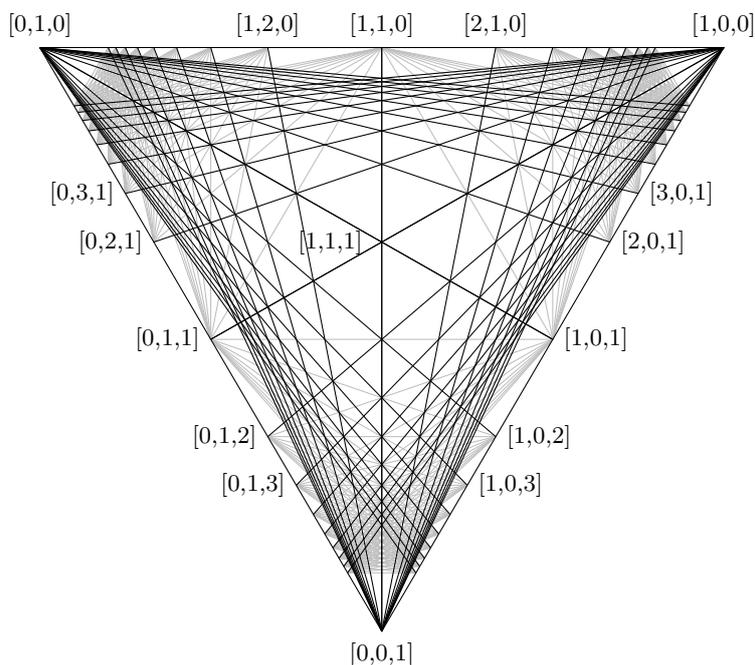


FIGURE 4.1 – Quelques droites admissibles, principales ou non, dans le cas $n = 3$.

LEMME 4.1. — *Pour tout compact $K \subset \nabla$, l'ensemble des hyperplans admissibles rencontrant K est fini.*

Démonstration. — Pour tout entier $p \geq 1$, posons

$$K_p = \left\{ [\alpha]; p \geq \frac{\alpha_1^+}{\alpha_n^+} \right\}.$$

Comme K est compact, la fonction $[\alpha] \mapsto \frac{\alpha_1^+}{\alpha_n^+}$ est bornée sur K , donc il est suffisant de prouver le lemme pour $K = K_p$. Or ceci découle de l'observation que si $\sum_{j \neq i} m_j > p$ dans (4.1), alors pour tout $[\alpha] \in K_p$

$$\sum_{j \neq i} m_j \alpha_j > p \alpha_n^+ \geq \alpha_1^+ \geq \alpha_i,$$

et donc l'hyperplan admissible correspondant ne rencontre pas K_p . □

Pour $\alpha \in \Pi$ on définit la *multiplicité* $\text{mult}(\alpha) = \text{mult}([\alpha])$ comme le nombre d'équations admissibles satisfaites par α . Comme conséquence immédiate du lemme 4.1, on a $\text{mult}([\alpha]) < \infty$ pour tout $[\alpha] \in \nabla$. On obtient également :

Remarque 4.2. — Soit $[\alpha] \in \nabla$, et notons $\mathcal{H}_{[\alpha]} \subset \nabla$ la réunion de tous les hyperplans admissibles ne passant pas par $[\alpha]$. Notons U la composante connexe contenant $[\alpha]$ de $\nabla \setminus \mathcal{H}_{[\alpha]}$. Alors par le lemme 4.1 U est un voisinage de $[\alpha]$ dans ∇ , qui par construction n'intersecte aucun autre hyperplan admissible que ceux passant par $[\alpha]$.

Remarque 4.3. — Pour tout $L \subset \nabla$ un demi-espace admissible, il existe $g \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ tel que $g(\nu_{\text{id}, [\alpha]}) = \nu_{\text{id}, [\alpha]}$ si et seulement si $[\alpha] \in L$. En effet, quitte à composer par une permutation on peut supposer que l'inégalité définissant L est de la forme $\alpha_1 \geq \sum_{i \geq 2} m_i \alpha_i$, et alors $g = (x_1 + x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}, x_2, \dots, x_n)$ convient.

Plus généralement, les demi-espaces admissibles permettent de caractériser le lieu fixé par un automorphisme.

PROPOSITION 4.4. — Soit $f = (f_1, \dots, f_n) \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Pi$. Alors $\nu_{\text{id}, [\alpha]} \in \text{Fix}(f) \cap \mathbf{E}_{\text{id}}$ si et seulement si α satisfait chaque inégalité de la forme

$$\alpha_i \geq \sum_{k=1}^r m_{j_k} \alpha_{j_k},$$

où $i = 1, \dots, n$ et $x_{j_1}^{m_{j_1}} \dots x_{j_r}^{m_{j_r}}$ est un monôme (distinct de x_i) apparaissant dans le polynôme f_i .

Démonstration. — On s'intéresse aux classes d'homothétie $\nu_{\text{id}, [\alpha]}$ fixées par f , ce qui par le corollaire 2.5 (iii) revient à trouver les valuations $\nu_{\text{id}, \alpha}$ fixées par f .

Supposons la valuation $\nu = \nu_{\text{id}, \alpha}$ fixée par f , ce qui revient à dire que pour chaque i on a $-\nu(f_i) = \alpha_i$. En particulier pour chaque monôme $x_{j_1}^{m_{j_1}} \dots x_{j_r}^{m_{j_r}}$ distinct de x_i apparaissant dans f_i on doit avoir

$$\alpha_i = -\nu(f_i) \geq -\nu\left(x_{j_1}^{m_{j_1}} \dots x_{j_r}^{m_{j_r}}\right) = \sum_{k=1}^r m_{j_k} \alpha_{j_k}.$$

Ceci implique que $i \notin \{j_1, \dots, j_r\}$, et donne la liste attendue d'équations admissibles.

Réciproquement, supposons que α satisfasse toutes ces inégalités. Notons ℓ_i la partie linéaire de la composante f_i , on a donc $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$ et $-\nu(f_i) \geq -\nu(\ell_i)$ pour chaque i . Par le lemme 2.3, pour toute valuation $\nu = \nu_{\text{id},\alpha}$ nous avons

$$-\nu(\ell_1) - \dots - \nu(\ell_n) \geq \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Le fait que α_i satisfasse les inégalités données par les monômes des f_i donne $\alpha_i \geq -\nu(f_i)$ pour tout i . On obtient $\alpha_i \geq -\nu(\ell_i)$ pour tout i , et si l'une de ces inégalités était stricte, alors on obtiendrait une contradiction

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n > -\nu(\ell_1) - \dots - \nu(\ell_n) \geq \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

On conclut que $\alpha_i = -\nu(f_i) = -\nu(\ell_i)$ pour tout i , et donc f fixe $\nu_{\text{id},\alpha}$ comme attendu. \square

Par la proposition 4.4, pour chaque automorphisme linéaire ou élémentaire $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ on a $\mathbf{E}_f \cap \mathbf{E}_{\text{id}} \neq \emptyset$. Puisque $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ est engendré par les automorphismes linéaires et élémentaires, on obtient immédiatement :

COROLLAIRE 4.5. — *Pour tous $f, g \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, il existe une suite $f_0, \dots, f_k \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ tel que $f = f_0, g = f_k$, et $\mathbf{E}_{f_{i-1}} \cap \mathbf{E}_{f_i} \neq \emptyset$ pour chaque $i = 1, \dots, k$.*

Exemple 4.6. — Si $g = (x_1 + x_2^3, x_2)$ et $h = (x_1, x_2 + x_1^2)$, alors les appartements $\mathbf{E}_h, \mathbf{E}_{\text{id}}, \mathbf{E}_g$ et \mathbf{E}_{gh} forment une suite d'appartements de \mathbf{X}_2 tel que chaque couple d'appartements consécutifs s'intersectent, voir figure 4.2. On établira plus loin dans la section 6.2 que, comme suggéré par la figure, \mathbf{X}_2 admet une structure d'arbre.

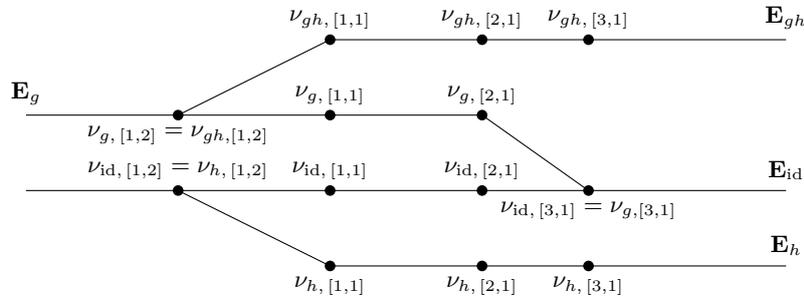


FIGURE 4.2 – Quatre appartements dans \mathbf{X}_2

La proposition 4.4 a aussi les conséquences suivantes :

COROLLAIRE 4.7. — *Soient $\alpha', \alpha'' \in \Pi$. Supposons que chaque demi-espace admissible contenant α' contient α'' . Alors le stabilisateur dans $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ de $\nu_{\text{id}, [\alpha']}$ est contenu dans le stabilisateur de $\nu_{\text{id}, [\alpha']}$.*

Démonstration. — Soit $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$. Par la proposition 4.4, $\text{Fix}(f) \cap \mathbf{E}_{\text{id}} = \{\nu_{\text{id}, [\alpha]}\}$ où $[\alpha] \in L_1 \cap \dots \cap L_k$, intersection de demi-espaces admissibles de ∇ . Si $\nu_{\text{id}, [\alpha']} \in \text{Fix}(f)$, alors $[\alpha'] \in L_i$ pour chaque $i = 1, \dots, k$. Par l'hypothèse, $[\alpha''] \in L_i$ pour chaque $i = 1, \dots, k$. Donc $\nu_{\text{id}, [\alpha'']} \in \text{Fix}(f)$, comme attendu. \square

COROLLAIRE 4.8. — Soient $n = 3$ et $\alpha : (t_0, \infty) \rightarrow \text{int}(\Pi^+)$ une courbe le long de laquelle $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ et $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ sont non décroissantes. Alors les stabilisateurs dans $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ des points $\nu_{\text{id}, [\alpha(t)]}$ forment une famille croissante de groupes.

Démonstration. — Soient $t \in (t_0, \infty)$ et $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ tels que $\nu_{\text{id}, [\alpha(t)]} \in \text{Fix}(f)$. Si L est un demi-espace admissible dans ∇ contenant $[\alpha(t)]$, vu que $\alpha_1(t) > \alpha_2(t) > \alpha_3(t)$, l'inégalité définissant L est de la forme $\alpha_2 \geq m_3\alpha_3$ ou $\alpha_1 \geq m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3$. Puisque $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ et $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ sont non décroissantes le long de $\alpha(t)$, dans tous les cas $[\alpha(t')] \in L$ pour $t' \geq t$. Par le corollaire 4.7, on obtient $\nu_{\text{id}, [\alpha(t')]} \in \text{Fix}(f)$. \square

4.2. Autour de $[m, p, 1]$

On se place maintenant en dimension $n = 3$, et on va étudier plus précisément les intersections d'appartements autour d'une valuation $\nu_{\text{id}, [\alpha]}$ de poids $\alpha = (m, p, 1)$ avec $m \geq p \geq 1$ deux entiers.

Remarque 4.9. — Soient $p \geq 1$ un entier et $\alpha \in \Pi^+$ avec $\alpha_2 = p\alpha_3$ et $\text{mult}(\alpha) \geq 2$. Chaque autre équation admissible pour α est de la forme $\alpha_1 = m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3$, ce qui entraîne $\alpha_1 = m_2p\alpha_3 + m_3\alpha_3 = (m_2p + m_3)\alpha_3$. Donc $\alpha = [m, p, 1]$ pour $m = m_2p + m_3$.

Observons qu'il existe des poids $\alpha \in \Pi^+$ avec $\text{mult}(\alpha) \geq 2$ qui ne sont pas de cette forme, par exemple $(6, 3, 2)$ vérifiant $\alpha_1 = 2\alpha_2$ et $\alpha_1 = 3\alpha_3$, ou encore $(11, 3, 2)$ vérifiant $\alpha_1 = 3\alpha_2 + \alpha_3$ et $\alpha_1 = \alpha_2 + 4\alpha_3$.

Remarque 4.10. — Fixons $m \geq p \geq 1$ deux entiers, et notons $m = pq + r$ la division euclidienne de m par p . Le poids $\alpha = (m, p, 1)$ satisfait exactement $q + 2$ équations admissibles, qui sont $\alpha_2 = p\alpha_3$ et $\alpha_1 = a\alpha_2 + (m - pa)\alpha_3$, $a = 0, \dots, q$. Ces équations correspondent respectivement aux directions de $[m, p, 1]$ vers $[1, 0, 0]$ (ou $[0, p, 1]$) et vers $[m - pa, 0, 1]$ (ou $[a, 1, 0]$).

Soit α dans l'intérieur de Π^+ et $U \subset \nabla^+$ le voisinage de $[\alpha]$ de la remarque 4.2. Soient $f, g \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ avec $\nu := \nu_{f, [\alpha]} = \nu_{g, [\alpha]}$. Notons $U_{f, g} := \{[\alpha'] \in U; \nu_{f, [\alpha']} = \nu_{g, [\alpha']}\} \subset \nabla^+$. On dira que \mathbf{E}_f et \mathbf{E}_g sont *localement équivalents* en ν , noté $f \sim_\nu g$, si $U_{f, g} = U$.

Si $\nu = \nu_{\text{id}, [\alpha]}$ avec $\alpha = (m, p, 1)$, $m > p > 1$, rappelons que $M_\alpha \subset \text{Stab}(\nu)$ est le sous-groupe des automorphismes

$$(x_1 + P(x_2, x_3), x_2 + Q(x_3), x_3 + d)$$

avec $-\nu(P) \leq m$, $-\nu(Q) = \text{deg } Q \leq p$. Définissons alors $N_\alpha \subset M_\alpha$ comme le sous-groupe des automorphismes avec $-\nu(P) < m$, $\text{deg } Q < p$.

LEMME 4.11. — Soit $\nu = \nu_{\text{id}, [\alpha]}$ de poids $\alpha = (m, p, 1)$ avec $m > p > 1$.

- (i) Pour chaque $f \in \text{Stab}(\nu)$ il existe $g \in M_\alpha$ tel que $\mathbf{E}_f^+ = \mathbf{E}_g^+$, et donc en particulier $f \sim_\nu g$.
- (ii) Soit $h \in M_\alpha$. Alors $\text{id} \sim_\nu h$ si et seulement si $h \in N_\alpha$.
- (iii) N_α est normal dans M_α . En particulier pour $f, g \in M_\alpha$ on a $f \sim_\nu g$ si et seulement si f et g deviennent égaux dans le quotient M_α/N_α .

Démonstration.

(i) On est dans le cadre de l'exemple 3.1 (ii), donc la proposition 3.2 donne

$$f = (x_1 + P(x_2, x_3), x_2 + Q(x_3), x_3 + d) \circ (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3) \in M_\alpha \times L_\alpha,$$

avec $-\nu(P) \leq m$, $\deg Q \leq p$. Par le corollaire 3.3 on a $\mathbf{E}_{\text{id}}^+ = \mathbf{E}_a^+$ où $a = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3)$. On conclut en prenant

$$g = (x_1 + P(x_2, x_3), x_2 + Q(x_3), x_3 + d).$$

(ii) Ce point découle de la proposition 4.4, en remarquant que $h \in N_\alpha$ si et seulement si le poids α est contenu dans l'intérieur de chaque demi-espace admissible associé à un monôme de l'une des composantes de h .

(iii) Considérons

$$\begin{aligned} f &= (x_1 + P(x_2, x_3), x_2 + Q(x_3), x_3 + d) \in M_\alpha, \\ g &= (x_1 + P'(x_2, x_3), x_2 + Q'(x_3), x_3 + d') \in N_\alpha, \\ f^{-1} &= (x_1 - P(x_2 - Q(x_3 - d), x_3 - d), x_2 - Q(x_3 - d), x_3 - d). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} Q''(x_3) &= Q(x_3) - Q(x_3 + d'), \\ P''(x_2, x_3) &= P(x_2, x_3) - P(x_2 + Q''(x_3) + Q'(x_3 + d), x_3 + d'). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &f^{-1}gf \\ &= f^{-1}\left(x_1 + P(x_2, x_3) + P'(x_2 + Q(x_3), x_3 + d), \right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. x_2 + Q(x_3) + Q'(x_3 + d), x_3 + d + d'\right) \\ &= \left(x_1 + P''(x_2, x_3) + P'(x_2 + Q(x_3), x_3 + d), x_2 + Q''(x_3) + Q'(x_3 + d), x_3 + d'\right). \end{aligned}$$

Puisque $\deg Q' < p$ et $\deg Q'' < \deg Q \leq p$ la deuxième composante de $f^{-1}gf$ est comme attendu. De même, $-\nu(P') < m$ et $-\nu(P'') < -\nu(P) \leq m$, donc la première composante de $f^{-1}gf$ est comme attendu, et $f^{-1}gf \in N_\alpha$. \square

Un *secteur centré en* $[\alpha]$ dans ∇ est l'intersection de deux demi-espaces admissibles dont les droites frontières passent par $[\alpha]$. La frontière d'un secteur est ainsi l'union de deux demi-droites issues de $[\alpha]$, chacune dirigée vers un point au bord à l'infini de ∇ .

LEMME 4.12. — Soit $\nu = \nu_{\text{id}, [\alpha]}$ de poids $\alpha = (m, p, 1)$ avec $m > p > 1$ et $f, g \in M_\alpha$. Si $U_{f,g} \neq U$, alors $U_{f,g}$ est l'intersection de U avec un secteur $S_{f,g} \subset \nabla$ centré en $[\alpha]$, et $g \sim_\nu fh$ pour un automorphisme triangulaire h que l'on peut choisir de la forme suivante, en fonction des deux demi-droites du secteur $S_{f,g}$:

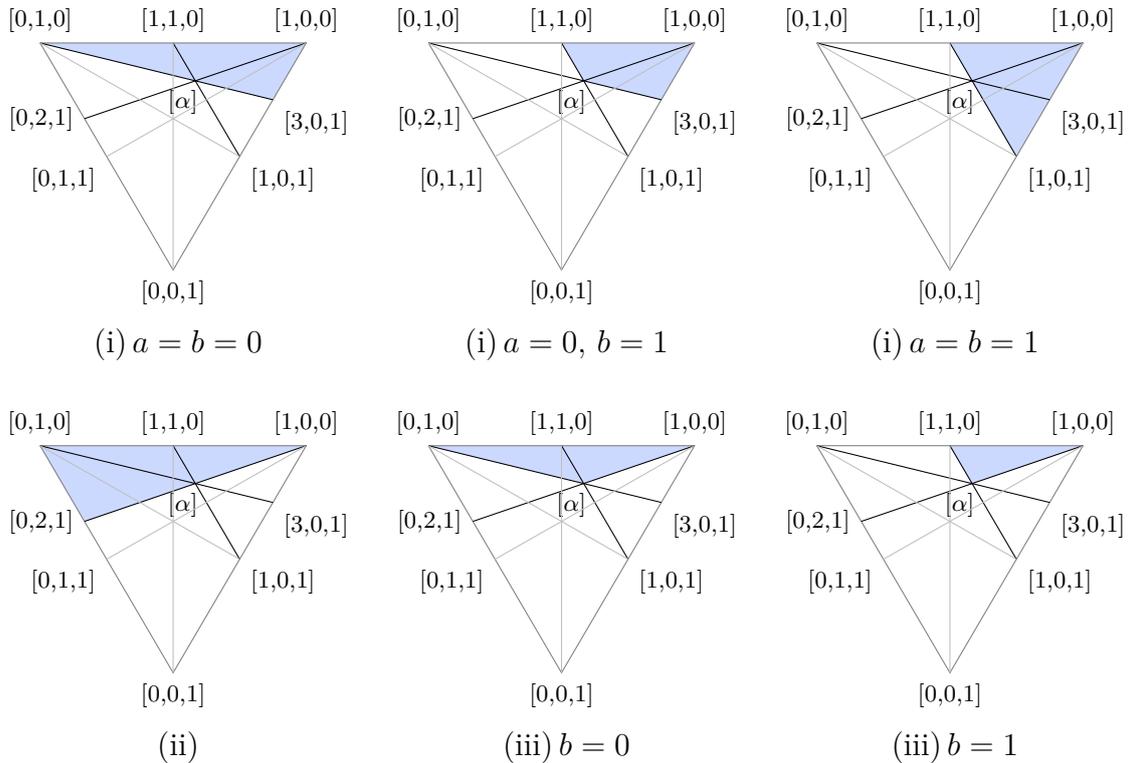


FIGURE 4.3 – Les 3 droites admissibles de ∇ passant par $[\alpha] = [3, 2, 1]$, et les différents secteurs $S_{f,g}$ possibles.

- (i) Si l'une des demi-droites de $S_{f,g}$ est dirigée vers $[m - pa, 0, 1]$, alors l'autre demi-droite est dirigée vers $[b, 1, 0]$ avec $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor \geq b \geq a \geq 0$, et

$$h = \left(x_1 + \sum_{i=a}^b c_i x_2^i x_3^{m-pi}, x_2, x_3 \right), \quad c_a \neq 0, c_b \neq 0.$$

- (ii) Si l'une des demi-droites de $S_{f,g}$ est dirigée vers $[0, p, 1]$, alors $S_{f,g}$ est le demi-espace $\alpha_2/\alpha_3 \geq p$ et

$$h = (x_1, x_2 + cx_3^p, x_3), \quad c \neq 0.$$

- (iii) Si l'une des demi-droites de $S_{f,g}$ est dirigée vers $[1, 0, 0]$ et $S_{f,g}$ n'est pas un demi-espace, alors l'autre demi-droite est dirigée vers $[b, 1, 0]$ avec $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor \geq b \geq 0$ et

$$h = \left(x_1 + \sum_{i=0}^b c_i x_2^i x_3^{m-pi}, x_2 + cx_3^p, x_3 \right), \quad c_b \neq 0, c \neq 0.$$

Démonstration. — Par le corollaire 2.5(ii) on peut supposer $f = \text{id}$. Écrivons

$$g = (x_1 + P(x_2, x_3), x_2 + Q(x_3), x_3 + d),$$

avec $-\nu(P) \leq m$, $\deg Q \leq p$. Par le lemme 4.11, quitte à composer par un élément de N_α on peut supposer $d = 0$, Q homogène de degré p , et P homogène de degré m

avec les variables x_2, x_3 de poids respectifs $p, 1$. Ceci donne le h attendu : par la proposition 4.4 les trois cas de l'énoncé correspondent respectivement à (i) $Q = 0$, (ii) $P = 0$, et (iii) P et Q tous deux non nuls. Le cas $Q = P = 0$ est exclu par l'hypothèse $U_{\text{id},g} \neq U$. \square

Exemple 4.13 (figure 4.3). — Si $\alpha = (3, 2, 1)$, il y a exactement 3 droites admissibles passant par $[\alpha]$, correspondant aux équations :

$$\alpha_2 = 2\alpha_3; \quad \alpha_1 = 3\alpha_3; \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3.$$

Observer que l'équation $2\alpha_1 = 3\alpha_2$ est également satisfaite par α , mais par définition n'est pas une équation admissible. Pour tout choix des coefficients c_i , l'automorphisme suivant est un élément de $\text{Stab}(\nu_{\text{id},[\alpha]})$:

$$(x_1 + c_0x_3^3 + c_1x_2x_3, x_2 + c_2x_3^2, x_3).$$

En annulant certains coefficients parmi les c_i , on peut réaliser chacun des six secteurs $S_{f,g}$ centrés en $[\alpha]$ prédits par le lemme 4.12.

5. Distance

5.1. Espace de longueur

D'après le corollaire 2.5 (ii), \mathbf{X} est la réunion des translatés de \mathbf{E}_{id}^+ sous l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$. Nous pouvons donc identifier \mathbf{X} avec $(\bigsqcup \mathbf{E}_f^+)/\sim$, réunion disjointe de copies de \mathbf{E}_{id}^+ indicées par $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, quotientée par une relation d'équivalence \sim . On commet ici l'abus d'écriture de noter \mathbf{E}_f^+ aussi bien la chambre dans \mathbf{X} que sa copie qui nous sert dans la construction abstraite par union disjointe et quotient.

Afin de munir \mathbf{X} d'une distance, concentrons-nous d'abord sur (chaque copie de) \mathbf{E}_{id}^+ et plus précisément, via l'application ρ_+ du corollaire 2.5 (i), sur le simplexe des poids projectivisés ∇^+ . Nous identifions chaque $[\alpha] \in \nabla^+$ avec son représentant dans Π^+ contenu dans l'hyperboloïde $\prod \alpha_i = 1$. Passant aux logarithmes $\beta_i = \log \alpha_i$, nous obtenons

$$\nabla^+ = \left\{ \alpha = (\exp \beta_1, \dots, \exp \beta_n); \beta_1 \geq \dots \geq \beta_n, \sum \beta_i = 0 \right\}.$$

Nous munissons alors ∇^+ de la distance $|\cdot, \cdot|$ induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n = \{(\beta_1, \dots, \beta_n)\}$. Cela la rend isométrique à la chambre de Weyl définie par les inégalités $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$ dans

$$\mathbb{R}^{n-1} = \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n; \sum \beta_i = 0 \right\}.$$

Notons que la même application de passage aux logarithmes identifie le simplexe ∇ entier avec $(\mathbb{R}^{n-1}, |\cdot, \cdot|)$, où \mathbb{R}^{n-1} est l'hyperplan d'équation $\sum \beta_i = 0$ et $|\cdot, \cdot|$ dénote toujours la distance induite par la distance euclidienne de \mathbb{R}^n . Ce procédé de définir une distance en passant aux logarithmes des poids est celui utilisé dans [BT84, Par00] dans le contexte de l'immeuble de $\text{SL}_n(\mathbb{F})$. Si on ne passait pas aux logarithmes, l'espace total obtenu ne serait plus localement $\text{CAT}(0)$, voir plus loin l'exemple 7.13. Un autre choix *a priori* naturel serait d'équiper le simplexe ∇ de la distance de Hilbert.

Cependant dès que le bord d'un domaine convexe contient deux segments de droite engendrant un plan, la distance de Hilbert n'est pas uniquement géodésique [Pap14, Theorem 5.6.8], et en particulier n'est pas CAT(0).

LEMME 5.1. — *Chaque demi-espace admissible de ∇ est un domaine convexe sous l'identification avec $(\mathbb{R}^{n-1}, |\cdot, \cdot|)$.*

Démonstration. — Considérons une équation admissible $\alpha_1 = \sum_{j>1} m_j \alpha_j$. Le domaine des solutions de l'inégalité $\alpha_1 \geq \sum_{j>1} m_j \alpha_j$ dans $(\mathbb{R}^{n-1}, |\cdot, \cdot|)$ étant fermé, pour obtenir sa convexité il suffit de démontrer que pour chaque β, β' à la frontière du domaine, le point $\frac{\beta+\beta'}{2}$ est dans le domaine. Pour de tels $(\beta_i) = (\log \alpha_i)$, $(\beta'_i) = (\log \alpha'_i)$ on a $\alpha_1 = \sum_{j>1} m_j \alpha_j$ et $\alpha'_1 = \sum_{j>1} m_j \alpha'_j$. On doit donc vérifier

$$\exp\left(\frac{\log(m_2\alpha_2 + \dots + m_n\alpha_n) + \log(m_2\alpha'_2 + \dots + m_n\alpha'_n)}{2}\right) \geq m_2 \exp\left(\frac{\log \alpha_2 + \log \alpha'_2}{2}\right) + \dots + m_n \exp\left(\frac{\log \alpha_n + \log \alpha'_n}{2}\right),$$

que l'on peut encore écrire

$$\sqrt{(m_2\alpha_2 + \dots + m_n\alpha_n)(m_2\alpha'_2 + \dots + m_n\alpha'_n)} \geq \sqrt{(m_2\alpha_2)(m_2\alpha'_2)} + \dots + \sqrt{(m_n\alpha_n)(m_n\alpha'_n)}.$$

En passant au carré, on obtient l'inégalité équivalente :

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} \left((m_j\alpha_j)(m_k\alpha'_k) + (m_k\alpha_k)(m_j\alpha'_j) \right) \geq \sum_{j,k} \sqrt{(m_j\alpha_j)(m_j\alpha'_j)(m_k\alpha_k)(m_k\alpha'_k)}.$$

Cette dernière découle directement de la classique inégalité des moyennes arithmético-géométriques $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. □

Remarque 5.2. — Les hyperplans principaux sont encore des hyperplans pour la distance $|\cdot, \cdot|$. Pour $n = 3$ les droites principales dans ∇ forment 3 familles des droites parallèles s'intersectant avec des angles $\pi/3$. On représente sur la figure 5.1 les droites principales dans ∇ avec à gauche la distance du simplexe, et à droite la distance $(\mathbb{R}^2, |\cdot, \cdot|)$. Sont également représentées, en rouge et bleu, deux droites admissibles mais non principales de ∇ : leurs images dans \mathbb{R}^2 deviennent des courbes, et le demi-espace admissible devient un convexe.

À travers l'identification $[\alpha] \mapsto \nu_{f, [\alpha]}$ de ∇^+ avec \mathbf{E}_f^+ , on munit chaque chambre \mathbf{E}_f^+ d'une distance que l'on note encore $|\cdot, \cdot|$. Considérons maintenant

$$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{X} = \left(\bigsqcup \mathbf{E}_f^+ \right) / \sim.$$

Nous définissons la distance $d_{\mathbf{X}}(\bar{x}, \bar{y})$ de la manière suivante :

DÉFINITION 5.3. — *Une chaîne (de longueur k) est une suite*

$$(x'_0, x_1 \sim x'_1, x_2 \sim x'_2, \dots, x_{k-1} \sim x'_{k-1}, x_k)$$

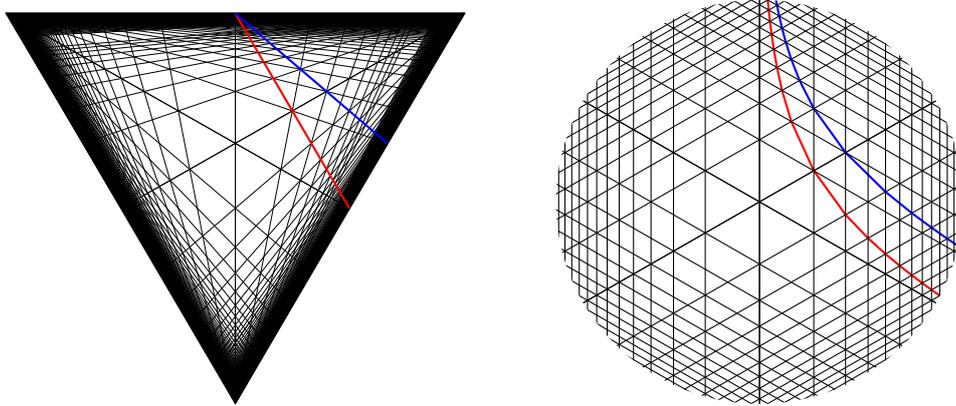


FIGURE 5.1 – Homéomorphisme entre ∇ et \mathbb{R}^2 .

dans $\sqcup \mathbf{E}_f^+$ telle qu'il existe $f_0, \dots, f_{k-1} \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ avec $x'_i, x_{i+1} \in \mathbf{E}_{f_i}^+$. La distance $d_{\mathbf{X}}(\bar{x}, \bar{y})$ est définie comme l'infimum des sommes

$$\sum_{i=0}^{k-1} |x'_i, x_{i+1}|,$$

pour tous les entiers k et toutes les chaînes de longueur k , avec $x'_0 \in \bar{x}$ (c'est-à-dire x'_0 un représentant de \bar{x}) et $x_k \in \bar{y}$. Suivant [BH99, I.5.19], nous appelons $d_{\mathbf{X}}$ la pseudo-distance quotient.

PROPOSITION 5.4. — La pseudo-distance quotient $d_{\mathbf{X}}$ est une distance, et \mathbf{X} muni de cette distance est un espace de longueur.

Démonstration. — Pour montrer que $d_{\mathbf{X}}$ est une distance, d'après [BH99, I.5.28] il suffit de vérifier les deux propriétés ci-dessous. De plus, \mathbf{X} sera alors un espace de longueur par [BH99, I.5.20].

- (1) Pour tous $x, z \in \mathbf{E}_f^+, x', z' \in \mathbf{E}_{f'}^+$, tels que $x \sim x'$ et $z \sim z'$, on a $|x, z| = |x', z'|$.
- (2) Pour tout $\bar{x} \in \mathbf{X}$ il existe $\varepsilon = \varepsilon(\bar{x}) > 0$ tel que $\bigcup_{x \in \bar{x}} B(x, \varepsilon)$ est une réunion de classes d'équivalence pour la relation \sim , où $B(x, \varepsilon)$ dénote une boule ouverte dans chaque $(\mathbf{E}_f^+, |\cdot, \cdot|)$.

La propriété (1) est une conséquence directe de la proposition 2.4.

Pour établir la propriété (2), si $x = \nu_{f, [\alpha]} \in \mathbf{E}_f^+$, choisissons d'abord $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que sous l'identification de \mathbf{E}_f^+ avec $\nabla^+ \subset \nabla$, le voisinage U de $[\alpha]$ de la remarque 4.2 contienne $B(x, \varepsilon)$. Ainsi $B(x, \varepsilon)$ n'intersecte aucun autre hyperplan admissible que ceux passant par $[\alpha]$. Ceux-ci sont lisses dans les coordonnées de $(\mathbb{R}^{n-1}, |\cdot, \cdot|)$, et sont en nombre fini à nouveau par le lemme 4.1, donc quitte à diminuer ε , pour chaque $y \in B(x, \varepsilon)$ il existe un chemin de y vers x dans $B(x, \varepsilon)$ le long duquel la multiplicité est constante, sauf peut-être en l'extrémité x où elle peut augmenter. Notons que $\varepsilon = \varepsilon([\alpha])$ ne dépend pas de f mais seulement de $[\alpha]$, grâce à la proposition 2.4. Ainsi $\varepsilon(\bar{x})$ est bien défini.

Considérons maintenant $y \in B(x, \varepsilon) \subset \mathbf{E}_f^+$, et soit $y' \sim y$ avec $y' \in \mathbf{E}_{f'}^+$. En utilisant l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ (et en remplaçant f par $f'^{-1}f$) on peut supposer $f' = \text{id}$. Par

la proposition 2.4, la relation $y' \sim y$ se traduit par $\bar{y} \in \text{Fix}(f)$. Par définition de ε , il existe un chemin de y vers x dont tous les points sont contenus dans le même ensemble d'hyperplans admissibles (sauf peut-être x qui est alors contenu dans un ensemble d'hyperplans encore plus grand). Alors par le corollaire 4.7, on a $\bar{x} \in \text{Fix}(f)$, et donc le point $x' \in \mathbf{E}_{\text{id}}^+$ de poids $[\alpha]$ satisfait $x' \sim x$. Finalement $y' \in \bigcup_{x \in \bar{x}} B(x, \varepsilon)$, et cet ensemble est donc bien saturé pour la relation d'équivalence \sim . \square

Dans le lemme qui suit nous conservons les notations $B(z, \varepsilon)$ et $\bar{B}(z, \varepsilon)$ pour les boules respectivement ouvertes ou fermées dans une chambre \mathbf{E}_f^+ , et nous utilisons les notations $B_{\mathbf{X}}(\bar{z}, \varepsilon)$, $\bar{B}_{\mathbf{X}}(\bar{z}, \varepsilon)$ pour les boules dans \mathbf{X} par rapport à $d_{\mathbf{X}}$.

LEMME 5.5. — Soit $\bar{z} \in \mathbf{X}$ et $\varepsilon = \varepsilon(\bar{z})$ vérifiant la propriété (2) ci-dessus. Soit $\mathbf{V}(\bar{z}, \varepsilon) = \bigsqcup_{z \in \bar{z}} B(z, \varepsilon) / \sim$ avec la pseudo-distance quotient induite de $\bigsqcup_{z \in \bar{z}} B(z, \varepsilon)$. De même, soit

$$\bar{\mathbf{V}}(\bar{z}, \frac{\varepsilon}{4}) = \bigsqcup_{z \in \bar{z}} \bar{B}(z, \frac{\varepsilon}{4}) / \sim$$

avec la pseudo-distance quotient induite de $\bigsqcup_{z \in \bar{z}} \bar{B}(z, \frac{\varepsilon}{4})$. Alors

- (a) $\mathbf{V}(\bar{z}, \varepsilon) \subset \mathbf{X}$ coïncide comme ensemble avec $B_{\mathbf{X}}(\bar{z}, \varepsilon)$, et
- (b) $\bar{\mathbf{V}}(\bar{z}, \frac{\varepsilon}{4})$ est isométrique à la boule $\bar{B}_{\mathbf{X}}(\bar{z}, \frac{\varepsilon}{4})$.

Démonstration. — D'après [BH99, I.5.27 (1,2)], l'ensemble $\mathbf{V}(\bar{z}, \varepsilon) \subset \mathbf{X}$ coïncide avec $B_{\mathbf{X}}(\bar{z}, \varepsilon)$ et l'ensemble $\bar{\mathbf{V}}(\bar{z}, \frac{\varepsilon}{4}) \subset \mathbf{X}$ coïncide avec $\bar{B}_{\mathbf{X}}(\bar{z}, \frac{\varepsilon}{4})$. De plus, d'après [BH99, I.5.27 (3)], cette dernière identification est une isométrie pour les distances induites par les espaces ambiants $\mathbf{V}(\bar{z}, \varepsilon)$ et \mathbf{X} . Observer que nous prenons un rayon $\varepsilon/4$, au lieu de $\varepsilon/2$ dans [BH99], parce que nous voulons travailler ici avec des boules fermées.

Il reste à remarquer que $\bar{\mathbf{V}}(\bar{z}, \frac{\varepsilon}{4})$ est isométriquement plongé dans $\mathbf{V}(\bar{z}, \varepsilon)$, car pour tous \bar{x}, \bar{y} dans $\bar{\mathbf{V}}(\bar{z}, \frac{\varepsilon}{4})$ et toute chaîne dans $\bigsqcup_{z \in \bar{z}} B(z, \varepsilon)$ de la forme $(x'_0 \in \bar{x}, x_1 \sim x'_1, \dots, x_k \in \bar{y})$ comme précédemment, nous pouvons la remplacer par la chaîne suivante. Les points x'_i, x_i appartiennent aux boules $B(z_i, \varepsilon), B(z_{i-1}, \varepsilon)$ dans $\mathbf{E}_{f_i}^+, \mathbf{E}_{f_{i-1}}^+$, pour z_i, z_{i-1} dans $\mathbf{E}_{\bar{z}}^+, \mathbf{E}_{\bar{z}}^+$ représentant \bar{z} . Appelons $p(x'_i)$ la projection radiale (par rapport au centre z_i) de x'_i sur $\bar{B}(z_i, \frac{\varepsilon}{4})$ dans $\mathbf{E}_{f_i}^+$ et définissons de même $p(x_i) \in \bar{B}(z_{i-1}, \frac{\varepsilon}{4})$. Par la définition d'une chaîne on a $x_i \sim x'_i$. Par la proposition 2.4 cela veut dire, en supposant pour simplicité que $f_{i-1} = \text{id}$, que f_i fixe \bar{x}_i . Puisque f_i fixe aussi \bar{z} , par la convexité de $\text{Fix}(f_i)$ dans \mathbf{E}_{id}^+ qui vient du lemme 5.1 et de la proposition 4.4, on obtient que f_i fixe $p(x_i)$. Alors $p(x_i) \sim p(x'_i)$ et les projections forment une chaîne avec

$$\sum_{i=0}^{k-1} |p(x'_i), p(x_{i+1})| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |x'_i, x_{i+1}|. \quad \square$$

LEMME 5.6. —

- (i) L'application $\rho_+ : (\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\nabla^+, |\cdot, \cdot|)$ du corollaire 2.5(i) est une isométrie en restriction à chaque \mathbf{E}_f^+ .
- (ii) L'application $\rho : (\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\nabla, |\cdot, \cdot|)$ du lemme 3.5 est une isométrie en restriction à chaque \mathbf{E}_f^+ .
- (iii) Les applications $\rho_+ : \mathbf{X} \rightarrow \nabla^+$ et $\rho : \mathbf{X} \rightarrow \nabla$ n'accroissent pas les distances.

Démonstration.

- (i) Soit $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{E}_f^+$. Soit $(x'_0, x_1 \sim x'_1, x_2 \sim x'_2, \dots, x_{k-1} \sim x'_{k-1}, x_k)$ une chaîne avec $x'_0 \in \bar{x}, x_k \in \bar{y}$. Alors

$$\sum_{i=0}^{k-1} |x'_i, x_{i+1}| = \sum_{i=0}^{k-1} |\rho_+(\bar{x}_i), \rho_+(\bar{x}_{i+1})| \geq |\rho_+(\bar{x}), \rho_+(\bar{y})|$$

avec l'égalité pour la chaîne triviale de longueur $k = 1$. Ainsi $d_{\mathbf{X}}(\bar{x}, \bar{y}) = |\rho_+(\bar{x}), \rho_+(\bar{y})|$.

- (ii) Par le corollaire 3.3 on peut supposer $f \in \text{Tame}_0(\mathbb{k}^n)$. Par définition pour $\alpha \in \Pi^+$ on a $\rho(\nu_{f, [\alpha]}) = [\sigma_f(\alpha)]$, où σ_f est la permutation associée à f définie juste avant le lemme 3.5. Alors le point (ii) découle du point (i) et du fait que l'application $[\alpha] \rightarrow [\sigma_f(\alpha)]$ est une isométrie de $(\nabla^+, |\cdot, \cdot|)$ sur son image dans $(\nabla, |\cdot, \cdot|)$.
- (iii) Grâce aux points précédents c'est une conséquence immédiate de la définition de la distance $d_{\mathbf{X}}$. \square

Remarque 5.7. — L'application $e: (\nabla, |\cdot, \cdot|) \rightarrow (\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}})$ définie par $e([\alpha]) = \nu_{\text{id}, [\alpha]}$ n'accroît pas la distance. Par le lemme 5.6 (iii), ρ aussi n'accroît pas la distance. De plus, par le lemme 3.5 (iii), $\rho \circ e$ est l'identité. Ainsi, \mathbf{E}_{id} identifié avec \mathbb{R}^{n-1} est isométriquement plongé dans \mathbf{X} . En utilisant l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ on obtient que chaque appartement \mathbf{E}_f est un \mathbb{R}^{n-1} isométriquement plongé, ce qui justifie la notation \mathbf{E} pour « Euclidien ».

LEMME 5.8. — *L'espace \mathbf{X} est complet.*

Démonstration. — Soit (ν_m) une suite de Cauchy dans \mathbf{X} . Par le lemme 5.6 (iii), $(\rho_+(\nu_m))$ est aussi une suite de Cauchy, et admet une limite $[\alpha] \in \nabla^+$ puisque $(\nabla^+, |\cdot, \cdot|)$ est fermé dans \mathbb{R}^{n-1} . Soit $\varepsilon = \varepsilon([\alpha])$ correspondant à la propriété (2) dans la preuve de la proposition 5.4. Soit M suffisamment grand tel que pour chaque $m \geq M$ on ait

$$d_{\mathbf{X}}(\nu_M, \nu_m) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |\rho_+(\nu_m), [\alpha]| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $\nu_M \in \mathbf{E}_f^+$, soit $\bar{z} = \nu_{f, [\alpha]}$. Ainsi pour $m \geq M$ on a $\nu_m \in B_{\mathbf{X}}(\bar{z}, \varepsilon) = \mathbf{V}(\bar{z}, \varepsilon)$ par le lemme 5.5 (a). Par définition de $\mathbf{V}(\bar{z}, \varepsilon)$, pour chaque $m \geq M$ il existe $z_m \in \bar{z}$ avec $\nu_m \in B(z_m, \varepsilon)$. Donc $d_{\mathbf{X}}(\bar{z}, \nu_m) \leq |[\alpha], \rho_+(\nu_m)|$ qui tend vers 0 quand m tend vers l'infini. Ainsi $\nu_m \rightarrow \bar{z}$. \square

Finalement, remarquons que puisque pour tous $f, g \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ l'action de f induit une isométrie de \mathbf{E}_g vers \mathbf{E}_{fg} , l'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ sur \mathbf{X} est par isométries. De plus, par le corollaire 4.5, \mathbf{X} est connexe.

5.2. Un lemme angulaire

LEMME 5.9. — *Soit $\alpha = (m, p, 1) \in \Pi$ et $0 \leq k \leq m$. Dans ∇ considérons les demi-droites (voir figure 5.2) :*

- c_1 de $[\alpha]$ vers $[0, 0, 1]$;
- c_2 de $[\alpha]$ vers $[k, 0, 1]$;

- c_3 de $[\alpha]$ vers $[m - k, 0, 1]$;
- c_4 de $[\alpha]$ vers $[m, 0, 1]$.

Les c_i deviennent des courbes lisses pour la distance $|\cdot, \cdot|$ de \mathbb{R}^2 . Pour $1 \leq i < j \leq 4$, notons θ_{ij} l'angle au point $[\alpha]$ entre les courbes c_i et c_j , pour la distance $|\cdot, \cdot|$. Alors $\theta_{12} = \theta_{34}$, ou de façon équivalente $\theta_{12} + \theta_{13} = \pi/3$.

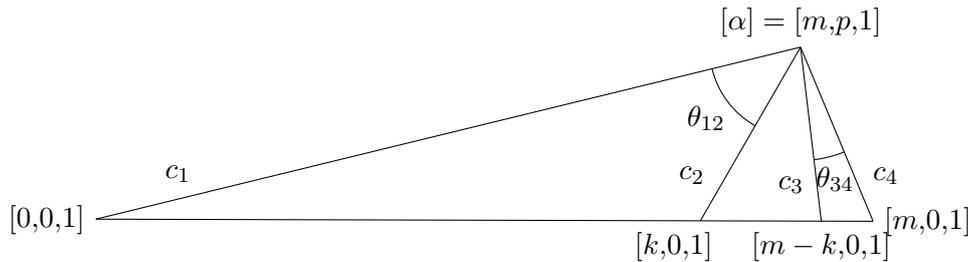


FIGURE 5.2 – Lemme angulaire 5.9. Le dessin est dans le simplexe ∇ , mais noter que les angles doivent être considérés relativement à la distance $|\cdot, \cdot|$.

Démonstration. — Notons que $[0, 1, 0]$ est colinéaire avec $[\alpha]$ et $[m, 0, 1]$, donc c_1 et c_4 sont principales et $\theta_{14} = \frac{\pi}{3}$ par la remarque 5.2. Le fait que les deux conclusions sont équivalentes vient alors de l'égalité

$$\frac{\pi}{3} = \theta_{14} = \theta_{12} + \theta_{13} + (\theta_{34} - \theta_{12}).$$

Considérons l'involution de ∇ et son bord à l'infini donnée par :

$$\tau : [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \mapsto [\alpha_1, p\alpha_3, \alpha_2/p].$$

Cette involution fixe la droite des poids $[t, p, 1]$, $t \geq 0$, qui contient $[\alpha]$. De plus, $\tau[0, 0, 1] = [0, 1, 0]$ qui est colinéaire avec $[\alpha]$ et $[m, 0, 1]$, et $\tau[k, 0, 1] = [k, p, 0]$ qui est colinéaire avec $[\alpha]$ et $[m - k, 0, 1]$. En particulier, τ échange les droites contenant c_1 et c_4 , et également les droites contenant c_2 et c_3 , ainsi τ envoie les deux courbes formant l'angle θ_{12} sur celles formant l'angle θ_{34} .

Au niveau des $\beta_i = \log \alpha_i$, l'involution τ devient :

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \mapsto (\beta_1, \beta_3 + \log p, \beta_2 - \log p).$$

Ainsi pour la distance $|\cdot, \cdot|$ l'involution τ est une symétrie axiale (d'axe $\beta_2 - \beta_3 = \log p$). En particulier elle préserve les angles non orientés et on conclut $\theta_{12} = \theta_{34}$. \square

6. Simple connexité

Dans cette section nous montrons que \mathbf{X}_2 est un arbre et que \mathbf{X}_3 est simplement connexe. Dans ce but nous rappelons le formalisme des complexes de groupes simples, en suivant [BH99, II.12].

6.1. Complexes de groupes

Un *complexe de groupes* \mathcal{G} sur un poset $(\Sigma, <)$ est une collection de groupes $\{G_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$, avec pour chaque couple $\sigma > \tau$ un homomorphisme injectif $\varphi_{\tau\sigma}: G_\sigma \rightarrow G_\tau$. On demande de plus que chaque triplet $\sigma > \tau > \rho$ donne lieu à une relation de compatibilité $\varphi_{\rho\tau} \circ \varphi_{\tau\sigma} = \varphi_{\rho\sigma}$. Un *sous-complexe* de \mathcal{G} est la donnée d'un sous-poset Σ' de Σ , muni, pour tous $\sigma, \tau \in \Sigma'$, des mêmes $G_\sigma, \varphi_{\tau\sigma}$ que \mathcal{G} .

Un *morphisme* $\psi: \mathcal{G} \rightarrow G$ d'un complexe de groupes vers un groupe G est une collection d'homomorphismes $\psi_\sigma: G_\sigma \rightarrow G$ satisfaisant $\psi_\sigma = \psi_\tau \circ \varphi_{\tau\sigma}$ pour tout couple $\sigma > \tau$. Dans la situation typique où Σ est le poset des cellules d'un complexe polyédral D , à un tel morphisme nous associons un *développement* de D qui est la réunion disjointe $D \times G$ de G copies de D quotientée par la relation $(x, h) \sim (x, hg)$, où x appartient à une cellule σ et g est contenu dans l'image de ψ_σ . Cette notion de développement peut être vue comme l'inverse d'un passage au quotient :

THÉORÈME 6.1 ([BH99, II.12.20(1)]). — *Soit \mathcal{G} un complexe de groupes sur le poset des cellules d'un complexe polyédral D . Supposons que D est un domaine fondamental de l'action de G sur un complexe polyédral D' , que chaque G_σ est le stabilisateur de σ , et que les $\varphi_{\tau\sigma}: G_\sigma \rightarrow G_\tau, \psi_\sigma: G_\sigma \rightarrow G$ sont les inclusions évidentes. Alors D' est isomorphe comme complexe polyédral, de manière G -équivariante, au développement associé à ψ .*

Dans la situation du théorème 6.1 nous disons que \mathcal{G} est *développable*.

Supposons D simplement connexe. Alors le *groupe fondamental* $F\mathcal{G}$ de \mathcal{G} est le produit libre de tous les G_σ quotienté par les relations $g \sim \varphi_{\tau\sigma}(g)$. Si \mathcal{G} est développable, on définit son *développement universel* comme le développement associé au morphisme naturel $\psi: \mathcal{G} \rightarrow F\mathcal{G}$. Chaque morphisme $\psi: \mathcal{G} \rightarrow G$ induit une application $F\psi: F\mathcal{G} \rightarrow G$. Si $F\psi$ est un isomorphisme, alors le développement associé à ψ est isomorphe au développement universel.

THÉORÈME 6.2 ([BH99, II.12.20(4)]). — *Le développement universel est simplement connexe.*

6.2. X_2 est un arbre

Quand $n = 2$, ∇^+ muni de la distance euclidienne $|\cdot, \cdot|$ est une demi-droite d'extrémité égale à $[1, 1]$, et chaque hyperplan admissible dans ∇^+ est un point $[i, 1]$ pour $i \geq 1$. Le représentant de $[i, 1]$ dans l'hyperboloïde $\alpha_1\alpha_2 = 1$ est

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\sqrt{i}, \frac{1}{\sqrt{i}} \right),$$

et donc $\beta_1 = \frac{\log i}{2}, \beta_2 = -\frac{\log i}{2}$. On obtient que $[i+1, 1]$ est à distance $\frac{\log(i+1) - \log i}{\sqrt{2}}$ de $[i, 1]$. Nous considérons alors ∇^+ comme un graphe métrique, avec un sommet $s_i = [i, 1]$ pour chaque $i \geq 1$, et une arête e_i de longueur $\frac{\log(i+1) - \log i}{\sqrt{2}}$ entre chaque s_i et s_{i+1} . Pour chaque cellule ouverte σ de ∇^+ , notons $G_\sigma \subset \text{Aut}(\mathbb{k}^2)$ le stabilisateur de $\nu_{\text{id}, [\alpha]}$ pour $[\alpha] \in \sigma$: par la proposition 4.4, cette définition est bien indépendante du choix de $[\alpha]$.

D'après la proposition 3.2, G_{s_1} est le groupe affine A_2 et G_{e_1} est le sous-groupe affine triangulaire dans A_2 . En outre, pour $i \geq 2$, $G_{s_i} = G_{e_i}$ est le groupe des automorphismes de la forme $(ax_1 + P(x_2), bx_2 + c)$ avec $\deg P \leq i$. En particulier, pour tout $i \geq 2$ nous avons $G_{s_i} \subset G_{s_{i+1}}$. Soit \mathcal{G} le graphe de groupes sur le poset des cellules de ∇^+ muni de ces groupes. La limite inductive $\lim_{i \geq 2} G_{s_i}$ est égale au groupe E_2 des automorphismes triangulaires. Ainsi le groupe fondamental $F\mathcal{G}$ est le produit amalgamé de A_2 et E_2 le long du groupe affine triangulaire $A_2 \cap E_2$.

D'après le corollaire 2.5(ii), \mathbf{E}_{id}^+ est un domaine fondamental pour l'action de $\text{Aut}(\mathbb{k}^2)$ sur \mathbf{X}_2 . En identifiant \mathbf{E}_{id}^+ avec ∇^+ , d'après le théorème 6.1, le développement associé au morphisme naturel $\psi: \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{k}^2)$ est isomorphe à \mathbf{X}_2 . Considérons le morphisme $F\psi: F\mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{k}^2)$ induit par ψ . D'après le théorème de Jung–van der Kulk on a $\text{Aut}(\mathbb{k}^2) = A_2 *_{A_2 \cap E_2} E_2$, ainsi $F\psi$ est un isomorphisme, et donc \mathbf{X}_2 est isomorphe au développement universel de \mathcal{G} . Celui-ci étant (un graphe) simplement connexe d'après le théorème 6.2, on conclut comme attendu que \mathbf{X}_2 est un arbre métrique.

6.3. \mathbf{X}_3 est simplement connexe

Nous utilisons maintenant les mêmes idées que dans le paragraphe précédent pour montrer :

PROPOSITION 6.3. — *Sur un corps \mathbb{k} de caractéristique nulle, \mathbf{X}_3 est simplement connexe.*

Au lieu du théorème de Jung–van der Kulk nous utilisons les deux résultats suivants concernant la structure du groupe $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$. Notons $A = A_3$ le groupe affine,

$$B = \{(ax_1 + P(x_2, x_3), bx_2 + cx_3 + d, b'x_2 + c'x_3 + d') ; \\ P \in \mathbb{k}[x_2, x_3], a \neq 0, bc' - b'c \neq 0\},$$

$$C = \{(f_1, f_2, f_3) \in \text{Tame}(\mathbb{k}^3); f_3 = cx_3 + d, c \neq 0\},$$

$$H_1 = \{(ax_1 + P(x_2, x_3), bx_2 + R(x_3), cx_3 + d); P \in \mathbb{k}[x_2, x_3], R \in \mathbb{k}[x_3] \text{ } a, b, c \neq 0\},$$

$$K_2 = \{(ax_1 + bx_2 + P(x_3), a'x_1 + b'x_2 + R(x_3), cx_3 + d); \\ P, R \in \mathbb{k}[x_3], ab' - a'b \neq 0, c \neq 0\}.$$

THÉORÈME 6.4 ([Wri15, Theorem 2], [Lam19, Corollary 5.8]). — *Sur un corps \mathbb{k} de caractéristique nulle, le groupe $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ est le produit amalgamé des groupes A, B, C le long de leurs intersections respectives. Autrement dit, $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ est le groupe fondamental du triangle de groupes où les groupes de sommets sont A, B, C et les autres groupes sont leurs intersections adéquates.*

PROPOSITION 6.5 ([LP19, Proposition 3.5]). — *Le groupe C est le produit amalgamé de H_1 et K_2 le long de leur intersection.*

Preuve de la proposition 6.3. — Les droites admissibles munissent ∇^+ d'une structure de complexe polygonal (nous oublions provisoirement la distance pour ne garder que l'objet combinatoire). Précisément, les sommets sont les points d'intersection entre droites admissibles différentes, les arêtes ouvertes sont les composantes

connexes du complément des sommets dans les droites admissibles, et les cellules ouvertes de dimension 2 sont les composantes connexes dans ∇^+ du complément des sommets et des arêtes (*i.e.* des droites admissibles). Pour chaque cellule ouverte σ de ∇^+ , soit $G_\sigma \subset \text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ le stabilisateur de $\nu_{\text{id}, [\alpha]}$ pour un poids $[\alpha] \in \sigma$. Soit \mathcal{G} le complexe de groupes sur le poset des cellules de ∇^+ muni de ces groupes.

Pour obtenir la simple connexité de \mathbf{X}_3 , selon le même argument que dans le cas $n = 2$, il suffit de démontrer que $F\mathcal{G} = \text{Tame}(\mathbb{k}^3)$. Bien que le théorème 6.2 concerne la simple connexité de la réalisation géométrique du poset de \mathbf{X}_3 , la distance $d_{\mathbf{X}}$ lui est localement bilipschitz et cela entraînera donc bien la simple connexité de $(\mathbf{X}_3, d_{\mathbf{X}})$.

Afin d'analyser le groupe fondamental $F\mathcal{G}$, nous considérons la partition suivante de \mathcal{G} en sous-complexes (figure 6.1, à gauche), où par définition les cellules sont munies des mêmes groupes que dans \mathcal{G} . Soit \mathcal{A} le sommet $[1, 1, 1]$, \mathcal{B} le sous-complexe sur le poset des cellules dans la demi-droite $\frac{1}{2}\alpha_1 \geq \alpha_2 = \alpha_3$, et \mathcal{C} le sous-complexe sur le poset des cellules dans la région $\alpha_2 \geq 2\alpha_3$. Soit \mathcal{AB} l'arête entre $[1, 1, 1]$ et $[2, 1, 1]$, \mathcal{AC} l'arête entre $[1, 1, 1]$ et $[2, 2, 1]$, et \mathcal{ABC} le triangle ($[1, 1, 1], [2, 1, 1], [2, 2, 1]$). Finalement, soit \mathcal{BC} le sous-complexe sur le poset des cellules dans la région $\alpha_1 \geq 2\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_3$.

De plus, nous partitionnons encore le sous-complexe \mathcal{C} de la manière suivante. Soit \mathcal{K} le sous-complexe sur le poset des cellules dans la demi-droite $\alpha_1 = \alpha_2 \geq 2\alpha_3$, \mathcal{H} le sous-complexe sur le poset des cellules dans la région définie par $\alpha_2 \geq 2\alpha_3$ et $\alpha_1 \geq \alpha_2 + \alpha_3$, et \mathcal{HK} le sous-complexe sur le poset des cellules dans la région R déterminée par $\alpha_2 + \alpha_3 > \alpha_1 > \alpha_2 \geq 2\alpha_3$. Observons qu'ici comme plus haut certaines faces des cellules de ces posets ne leur appartiennent pas. Décrivons plus précisément le poset Σ des cellules de \mathcal{HK} . Les seules droites admissibles intersectant R sont d'équation $\alpha_1 = m\alpha_3$ ou $\alpha_2 = m\alpha_3$, pour $m > 2$, et elles ne s'intersectent pas dans R . Alors chaque 2-cellule de Σ , sauf une, a exactement deux arêtes dans Σ (voir figure 6.1, à droite). La structure des posets de \mathcal{BC} et de \mathcal{H} est plus compliquée.

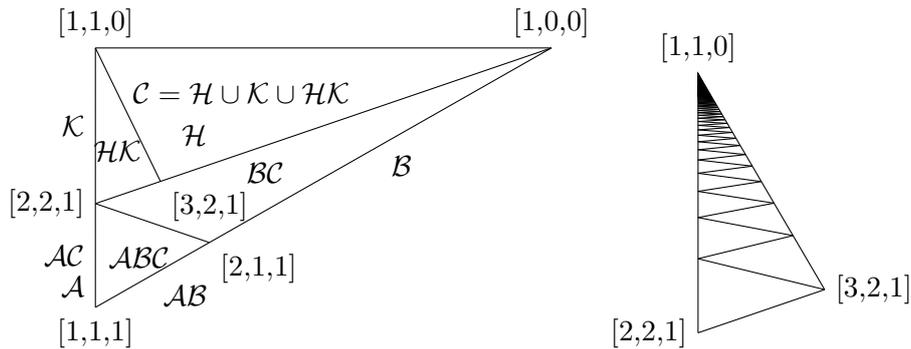


FIGURE 6.1 – Découpage de \mathcal{G} en sous-complexes, et zoom sur les cellules dans \mathcal{HK} .

Pour démontrer $F\mathcal{G} = \text{Tame}(\mathbb{k}^3)$, grâce au théorème 6.4 il suffit d'obtenir :

- (1) $F\mathcal{A} = \mathcal{A}$

- (2) $F\mathcal{A}\mathcal{B} = A \cap B$
- (3) $F\mathcal{A}\mathcal{C} = A \cap C$
- (4) $F\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C} = A \cap B \cap C$
- (5) $F\mathcal{B} = B$
- (6) $F\mathcal{B}\mathcal{C} = B \cap C$
- (7) $F\mathcal{C} = C$
- (8) Les groupes de $\mathcal{B}\mathcal{C}$ forment un système inductif de groupes; de plus pour chaque élément $g \in G_\sigma$ dans $\mathcal{B}\mathcal{C}$ il existe un élément $g' \in G_{\sigma'}$ (resp. $g'' \in G_{\sigma''}$) dans $\mathcal{B}\mathcal{C}$ équivalent à g dans la limite $F\mathcal{B}\mathcal{C}$, tel que σ' (resp. σ'') a une face dans le poset de \mathcal{B} (resp. \mathcal{C}).

La propriété (8) est nécessaire pour s'assurer que chaque élément de $B \cap C$ soit identifié à sa copie dans B et C . Les propriétés analogues pour les autres inclusions sont immédiates.

Les propriétés (1)-(4) découlent immédiatement de la proposition 3.2, car dans chacun de ces cas le groupe fondamental est le stabilisateur d'un seul point. Plus précisément, (1) correspond à l'exemple 3.1 (i), et (2) à l'exemple 3.1 (iii). De plus, par la proposition 6.5 $A \cap C = A \cap K_2$ donc $A \cap B \cap C = A \cap B \cap K_2$ ce qui permet de déduire (3) et (4) des exemples 3.1 (iv) et 3.1 (ii).

Pour (5), notons que, également d'après la proposition 3.2 et l'exemple 3.1 (iv), les groupes de \mathcal{B} forment une suite croissante dont la réunion est B .

Pour (6), considérons une courbe $\alpha: (t_0, \infty) \rightarrow \Pi^+$ satisfaisant les hypothèses du corollaire 4.8, telle que sa projection $[\alpha(t)] \subset \nabla^+$ soit contenue dans les cellules de $\mathcal{B}\mathcal{C}$, et qui tende vers le point $[1, 0, 0]$ en étant asymptote à la droite $\alpha_2 = 2\alpha_3$. Par exemple la courbe $\alpha: (3, \infty) \rightarrow \Pi^+$ avec $\alpha(t) = (t^2, 2t, t + 1)$ convient (voir figure 6.2). Pour $\alpha \in \Pi^+$, soit $\sigma(\alpha)$ la cellule de ∇^+ contenant $[\alpha]$ dans son intérieur. D'après le corollaire 4.8, les $G_{\sigma(\alpha(t))}$ forment une suite croissante de groupes. Par la proposition 3.2, la réunion de cette suite est égale à $B \cap C$. Pour tout point dans une cellule de $\mathcal{B}\mathcal{C}$, il existe un segment de droite reliant ce point à un point de la courbe $[\alpha(t)]$ auquel on peut appliquer le corollaire 4.8. On obtient ainsi que chaque groupe de $\mathcal{B}\mathcal{C}$ est contenu dans un $G_{\sigma(\alpha(t))}$. En conséquence les groupes de $\mathcal{B}\mathcal{C}$ forment un système inductif de groupes (ce qui donne aussi la première partie de (8)) dont la limite est $B \cap C$.

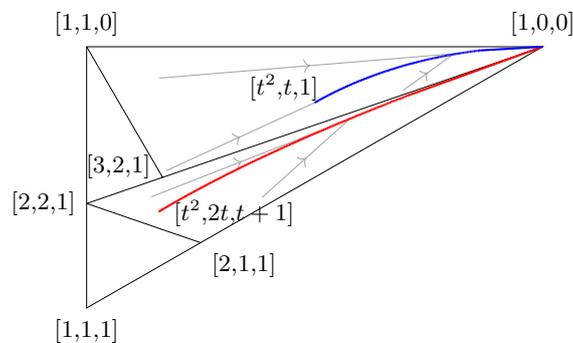


FIGURE 6.2 – Courbes et segments satisfaisant les hypothèses du corollaire 4.8.

Pour montrer (7) calculons FC . Nous utilisons la partition de C en \mathcal{K} , \mathcal{H} et \mathcal{HK} . D'abord, d'après la proposition 3.2 et l'exemple 3.1 (iv), les groupes de \mathcal{K} forment une suite croissante dont la réunion est K_2 . De même, les groupes de \mathcal{HK} forment une suite croissante dont la réunion est $H_1 \cap K_2$. Enfin, dans les cellules de \mathcal{H} considérons la projection $[\alpha(t)]$ de la courbe $\alpha: (2, \infty) \rightarrow \Pi^+$ avec $\alpha(t) = (t^2, t, 1)$ (voir figure 6.2). D'après le corollaire 4.8, les $G_{\sigma(\alpha(t))}$ forment une suite croissante. Par la proposition 3.2 la réunion de cette suite est égale à H_1 . D'après le corollaire 4.8 appliqué à des segments de droites bien choisis, chaque groupe de \mathcal{H} est contenu dans un $G_{\sigma(\alpha(t))}$. Ainsi les groupes de \mathcal{H} forment un système inductif dont la limite est H_1 . L'analogie de la propriété 8 avec $H_1 \cap K_2$ au lieu de $B \cap C$ est immédiat, car les groupes de \mathcal{HK} forment une suite croissante. On conclut grâce à la proposition 6.5 que $FC = H_1 *_{H_1 \cap K_2} K_2 = C$.

Enfin, pour la deuxième assertion de 8, considérons $g \in G_\sigma$ dans \mathcal{BC} . Par le lemme 4.1, σ est contenu dans un nombre fini de demi-espaces admissibles L_1, \dots, L_k . De plus, puisque σ est dans le poset de \mathcal{BC} , les L_i sont définies par des inégalités de la forme $\alpha_1 \geq m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3$ ou $\alpha_2 \geq \alpha_3$. Alors chaque cellule σ' (resp. σ'') ayant une face dans la demi-droite $\alpha_2 = \alpha_3$ (resp. la demi-droite $\alpha_2 = 2\alpha_3$), et suffisamment loin de $[1, 1, 1]$, est contenue dans tous les L_i . Les groupes de \mathcal{BC} forment un système inductif de groupes, donc il existe un G_ρ dans \mathcal{BC} contenant G_σ et G'_σ simultanément. Par le corollaire 4.7, $G_\sigma \subset G'_\sigma$ comme sous-groupes de $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$, et donc aussi pour leurs copies dans G_ρ . Ainsi il existe $g' \in G_{\sigma'}$ équivalent à g , comme attendu. De même, il existe $g'' \in G_{\sigma''}$ équivalent à g . \square

7. Propriété CAT(0) locale

Toute cette section est en dimension $n = 3$, sur un corps \mathbb{k} arbitraire. L'objectif est de montrer la

PROPOSITION 7.1. — *Soit $\alpha \in \Pi$, et $g \in \text{Tame}(\mathbb{k}^3)$. Alors $\nu_{g, [\alpha]}$ admet un voisinage CAT(0) dans \mathbf{X}_3 .*

Nous utiliserons les résultats fondamentaux suivants concernant les cônes et les links.

Soit Γ un graphe métrique. Le *cône sur Γ de rayon r* est le complexe simplicial obtenu comme le cône simplicial sur Γ , et considéré comme un espace de longueur comme suit. Pour chaque arête de Γ de longueur l on munit le triangle correspondant dans le cône de la distance d'un secteur d'angle l du disque euclidien de rayon r . Comparer avec [BH99, I.5.6] où est construit un espace métrique appelé le 0-cône, dans lequel notre cône se plonge comme une boule fermée de rayon r .

THÉORÈME 7.2 (Berestovskii, voir [BH99, II.3.14]). — *Soit Γ un graphe métrique et $r > 0$. Alors le cône sur Γ de rayon r est CAT(0) si et seulement si Γ est CAT(1).*

Rappelons également qu'un graphe métrique Γ est CAT(1) si et seulement si tout cycle plongé dans Γ est de longueur $\geq 2\pi$ [BH99, II.1.15(4)].

Maintenant soit X un complexe polygonal euclidien. Soit v un sommet de X et supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isométrie de pièces contenant v .

Le *link* de v dans X est le graphe métrique dont les sommets correspondent aux arêtes de X contenant v , et dont les arêtes correspondent aux polygones de X contenant v . La longueur d'une telle arête est définie comme l'angle en v du polygone correspondant. Voir [BH99, I.7.14].

THÉORÈME 7.3 ([BH99, I.7.16]). — *Il existe $r > 0$ tel que la boule fermée de rayon r autour v dans X est isométrique au cône de rayon r sur le link de v dans X .*

Afin de prouver la proposition 7.1 nous commençons par établir un critère abstrait pour vérifier qu'un espace obtenu par recollement est CAT(0).

7.1. Limite d'espaces CAT(0)

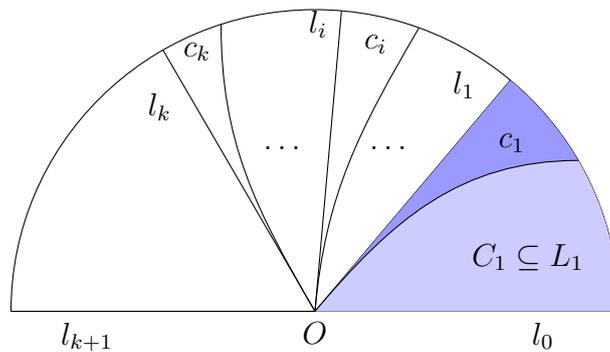


FIGURE 7.1 – Notations pour la section 7.1.

Soit $r > 0$ et $\mathbf{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$ le demi-disque fermé supérieur de rayon r dans $(\mathbb{R}^2, |\cdot, \cdot|)$. On note O le centre de \mathbf{D} . Soit $l_0, l_1, \dots, l_k, l_{k+1}$ une suite de rayons deux à deux distincts et ordonnés dans le sens direct, avec l_0 d'extrémité $(r, 0)$ et l_{k+1} d'extrémité $(-r, 0)$. Pour $j = 1, \dots, k$, soit c_j l'image d'une courbe lisse plongée $[0, 1] \rightarrow \mathbf{D}$. On suppose que c_j est distincte du rayon l_{j-1} , et est contenue dans le secteur fermé délimité par les rayons l_{j-1} et l_j , avec pour extrémités le centre O du demi-disque et un point dans l'arc de cercle du secteur. Soit C_j l'adhérence de la composante de $\mathbf{D} \setminus c_j$ contenant l_0 , et supposons chacun des C_j convexe. Soit L_j le secteur fermé délimité par les rayons l_j et l_0 : on a donc $L_{j-1} \subsetneq C_j \subseteq L_j$. Par convention, $C_0 = L_0 = c_0 = l_0, c_{k+1} = l_{k+1}, C_{k+1} = L_{k+1} = \mathbf{D}$, et $C_\infty = L_\infty = c_\infty = l_\infty$ est le diamètre $l_0 \cup l_{k+1}$ de \mathbf{D} (voir figure 7.1).

Soit $(\mathbf{D}_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de demi-disques indicée par un ensemble quelconque Λ , où pour chaque $\lambda, \varphi_\lambda : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}_\lambda$ est une isométrie. Supposons qu'il existe une relation d'équivalence \sim sur l'union disjointe $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{D}_\lambda$, qui en restriction à chaque $\mathbf{D}_\lambda \sqcup \mathbf{D}_{\lambda'}$ (où $\lambda \neq \lambda'$) est donnée par $\varphi_\lambda(x) \sim \varphi_{\lambda'}(x)$ si et seulement si $x \in C_{j(\lambda, \lambda')}$, pour une fonction j qui à chaque paire non ordonnée λ, λ' d'éléments distincts de Λ associe un élément de $\mathcal{I} = \{0, 1, \dots, k, k + 1, \infty\}$.

Remarque 7.4. — Nous affirmons que la relation \sim_0 sur $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{D}_\lambda$ qui en restriction à chaque $\mathbf{D}_\lambda \sqcup \mathbf{D}_{\lambda'}$ est donnée par $\varphi_\lambda(x) \sim_0 \varphi_{\lambda'}(x)$ si et seulement si $x \in L_{j(\lambda, \lambda')}$, pour la même fonction j que précédemment, est une relation d'équivalence.

Pour voir cela, remarquons qu'il existe une application symétrique $\cap: \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ telle que pour chaque $i, j \in \mathcal{I}$ on a $C_i \cap C_j = C_{i \cap j}$. Précisément, si $i, j < \infty$ alors $i \cap j = \min\{i, j\}$, si $i < k+1$ alors $i \cap \infty = 0$, et finalement $\infty \cap \infty = (k+1) \cap \infty = \infty$. De plus, $L_i \cap L_j = L_{i \cap j}$ pour cette même application \cap .

La transitivité de la relation \sim revient à dire que pour tout triplet d'indices distincts $\lambda, \lambda', \lambda''$ on a

$$C_{j(\lambda, \lambda') \cap j(\lambda', \lambda'')} = C_{j(\lambda, \lambda')} \cap C_{j(\lambda', \lambda'')} \subset C_{j(\lambda, \lambda'')},$$

donc

$$(j(\lambda, \lambda') \cap j(\lambda', \lambda'')) \cap j(\lambda, \lambda'') = j(\lambda, \lambda') \cap j(\lambda', \lambda'').$$

Ceci donne une égalité similaire pour les L_i :

$$L_{j(\lambda, \lambda') \cap j(\lambda', \lambda'')} = L_{j(\lambda, \lambda')} \cap L_{j(\lambda', \lambda'')} \subset L_{j(\lambda, \lambda'')},$$

ce qui montre que \sim_0 est transitive, et donc est une relation d'équivalence.

Notons \mathbf{V}_0, \mathbf{V} les espaces quotients correspondant à \sim_0 et \sim avec leurs pseudo-distances respectives d_0, d , définies par des longueurs de chaînes dans $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{D}_\lambda$ comme dans la définition 5.3. De la même manière que dans la preuve de la proposition 5.4, on démontre que ces pseudo-distances sont des distances, et les espaces quotients sont des espaces de longueur. Remarquons que dans chaque cas les points $\varphi_\lambda(O)$ sont identifiés à un point que nous appellerons le *centre* de \mathbf{V}_0 ou \mathbf{V} , et que nous noterons encore O . Par exemple, si $\Lambda = \{\lambda, \lambda'\}$ et $j(\lambda, \lambda') = \infty$, alors $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}$ est un disque fermé.

Le résultat principal de cette section est le critère suivant.

PROPOSITION 7.5. — *Les espaces \mathbf{V}_0 et \mathbf{V} sont complets. Si \mathbf{V}_0 est CAT(0), alors \mathbf{V} est également CAT(0).*

Démonstration. — Notre stratégie est de montrer que \mathbf{V} est une limite d'espaces CAT(0). Pour tout entier $m \geq 1$ et $j = 0, 1, \dots, k+1$ choisissons c_j^m une courbe linéaire par morceaux dont les extrémités sont les mêmes que celles de c_j , avec tous les sommets sur c_j , et dont chaque point est à distance $\leq \frac{1}{m}$ de c_j . Notons ensuite C_j^m l'adhérence de la composante de $\mathbf{D} \setminus c_j^m$ contenant l_0 . Comme précédemment on convient que $C_\infty^m = c_\infty^m = c_\infty$. Notons (\mathbf{V}_m, d_m) l'espace de longueur obtenu via la relation d'équivalence \sim_m sur $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{D}_\lambda$ qui sur chaque $\mathbf{D}_\lambda \sqcup \mathbf{D}_{\lambda'}$ est définie par $\varphi_\lambda(x) \sim_m \varphi_{\lambda'}(x)$ pour $x \in C_{j(\lambda, \lambda')}^m$ (la remarque 7.4 s'applique à \sim_m de la même manière qu'à \sim_0).

Il existe une application bilipschitzienne de \mathbf{D} vers \mathbf{D} qui envoie chaque l_j sur c_j (observer que c'est ici que l'on a besoin de $c_j \neq l_{j-1}$). De même, pour chaque $m \geq 1$ il existe une application bilipschitzienne de \mathbf{D} vers \mathbf{D} qui envoie chaque l_j sur c_j^m . Ainsi tous les espaces $\mathbf{V}, \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_m$ sont deux à deux bilipschitziens. L'espace \mathbf{V}_0 est complet par [BH99, I.7.13]. Précisément, il faut remplacer chaque secteur par un triangle isocèle, et donc le demi-disque par un polygone, afin de se ramener au cas d'un complexe polygonal avec un nombre fini de classes d'isométrie de pièces. Ce

remplacement est une application bilipschitzienne. Les espaces \mathbf{V} , \mathbf{V}_m sont alors également complets, car bilipschitziens à \mathbf{V}_0 .

Montrons maintenant que chaque \mathbf{V}_m est CAT(0). Comme \mathbf{V}_m est complet et simplement connexe (il se rétracte radialement sur le centre), par [BH99, II.4.1 (2)] il suffit de montrer que \mathbf{V}_m est localement CAT(0). Noter qu'il existe une application naturelle $\text{pr} : \mathbf{V}_m \rightarrow \mathbf{D}$ qui est l'inverse de chaque $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}_\lambda \subset \mathbf{V}_m$. Soit $x \in \mathbf{V}_m$, et considérons différentes possibilités pour $\text{pr}(x)$. Si $\text{pr}(x)$ n'appartient à aucune des courbes c_j^m , alors un voisinage suffisamment petit de x est un disque plat. Si $\text{pr}(x)$ appartient à une courbe c_j^m mais est distinct du centre O , alors un voisinage suffisamment petit de x est obtenu en recollant des disques (ou demi-disques) plats le long d'un sous-ensemble convexe commun, et un tel voisinage est CAT(0) par [BH99, II.11.3]. Finalement, considérons le cas $\text{pr}(x) = O$, c'est-à-dire que x est le centre de \mathbf{V}_m . Par le théorème 7.3, appliqué à $X = X_m$ obtenu comme précédemment en remplaçant dans \mathbf{V}_m les demi-disques par des polygones, il existe un voisinage de x qui est un cône sur le link Γ_m de x dans $X_m \subset \mathbf{V}_m$. De même, \mathbf{V}_0 est un cône sur un graphe métrique Γ_0 , et il existe une application naturelle $g_m : \Gamma_m \rightarrow \Gamma_0$ contractant les distances qui est une équivalence d'homotopie. Comme \mathbf{V}_0 est supposé être CAT(0), par le théorème 7.2 le graphe Γ_0 ne contient aucun cycle de longueur $< 2\pi$. Par conséquent, le graphe Γ_m n'en contient pas non plus, et par le théorème 7.2, un voisinage de x dans \mathbf{V}_m est CAT(0).

Considérons maintenant le sous-ensemble $R_m \subset \mathbf{V}_m \times \mathbf{V}$ constitué des couples $([x]_{\sim_m}, [x]_{\sim})$ pour $x \in \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{D}_\lambda$. Au vu du lemme 7.6 ci-dessous, R_m est une M/m -relation surjective au sens de [BH99, I.5.33], pour une certaine constante $M > 0$. On en déduit que la suite \mathbf{V}_m converge au sens de Gromov–Hausdorff vers \mathbf{V} , et donc \mathbf{V} est CAT(0) par [BH99, II.3.10]. \square

LEMME 7.6. — *Il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $m \geq 1$, et tous $x, y \in \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{D}_\lambda$, on a*

$$|d_m([x]_{\sim_m}, [y]_{\sim_m}) - d([x]_{\sim}, [y]_{\sim})| \leq \frac{M}{m}.$$

Démonstration. — Soit $l = d([x]_{\sim}, [y]_{\sim})$. Remarquons d'abord que comme $C_j^m \subset C_j$, on a

$$d_m([x]_{\sim_m}, [y]_{\sim_m}) \geq l.$$

Par définition de la (pseudo-)distance d , il existe une chaîne : un entier N et pour chaque $i = 0, 1, \dots, N-1$ un indice $\lambda_i \in \Lambda$ et des points $x'_i, x_{i+1} \in \mathbf{D}_{\lambda_i}$ avec $x_i \sim x'_i$ et $x = x'_0, y = x_N$, tel que $\sum_{i=0}^{N-1} |x'_i, x_{i+1}| < l + \frac{1}{m}$. Observons que si $\text{pr}(x_i) = \text{pr}(x'_i) = O$ pour un certain i , alors en faisant peut-être décroître $\sum |x'_i, x_{i+1}|$ on peut se ramener à une sous-chaîne avec $N = 2$ et $\text{pr}(x_1) = \text{pr}(x'_1) = O$. En choisissant une chaîne analogue dans \mathbf{V}_m on obtient alors l'estimé attendu avec $M = 1$. Si au contraire on a $\text{pr}(x_i) = \text{pr}(x'_i) \neq O$ pour tout i , alors pour $i = 1, \dots, N-1$ nous notons $j(i) = j(\lambda_{i-1}, \lambda_i)$ et nous opérons les réductions suivantes.

En passant à une sous-chaîne nous pouvons supposer que pour tout $i = 1, \dots, N-1$ on a $\lambda_i \neq \lambda_{i-1}$ et pour tout $i = 2, \dots, N-1$ on a $x'_{i-1} \notin \varphi_{\lambda_{i-1}}(C_{j(i)})$, et $x_i \notin \varphi_{\lambda_{i-1}}(C_{j(i-1)})$. En particulier, si $N > 2$ alors $j(i) \neq k+1$. En outre, si $j(i) \neq \infty$ alors $j(i+1) = \infty$, et vice-versa, ainsi sans perte de généralité nous pouvons supposer

que pour chaque i pair nous avons $j(i) = \infty$. De plus, pour tout $i = 1, \dots, N - 1$ l'inégalité triangulaire nous permet de supposer que $\text{pr}(x_i) = \text{pr}(x'_i)$ est dans $c_{j(i)}$.

De plus, nous affirmons que nous pouvons supposer la chaîne *tendue*, au sens que pour chaque $i = 2, \dots, N - 2$, l'union des segments $[x'_{i-1}, x_i]$ et $[x'_i, x_{i+1}]$ est géodésique dans $(\mathbf{D}_{\lambda_{i-1}} \sqcup \mathbf{D}_{\lambda_i}) / \sim$ (voir [BH99, I.7.20]). Cela revient à dire que l'angle au point $x_i \in \mathbf{D}_{\lambda_{i-1}}$ entre le segment de droite $[x'_{i-1}, x_i]$ et la courbe $\varphi_{\lambda_{i-1}}(c_{j(i)})$ est égal à l'angle au point $x'_i \in \mathbf{D}_{\lambda_i}$ entre $[x'_i, x_{i+1}]$ et la courbe $\varphi_{\lambda_i}(c_{j(i)})$. (Ce serait naturel de demander la même propriété pour $i = 1, N - 1$, mais on n'en a pas besoin et cela raccourcit un peu la preuve.)

L'affirmation découle des deux observations suivantes. Tout d'abord, si la chaîne n'est pas tendue, et que la définition précédente est mise en défaut pour un certain entier $i = t$, alors comme $C_{j(t)}$ est convexe et ne contient pas $\text{pr}(x'_{t-1}), \text{pr}(x_{t+1})$, la somme $\sum |x'_i, x_{i+1}|$ n'est pas minimale parmi les suites avec un N et un (λ_i) donnés, puisque nous pouvons la diminuer en bougeant x_t le long de $\varphi_{\lambda_{t-1}}(c_{j(t)})$ (et simultanément en bougeant x'_t). D'autre part, comme \mathbf{D}_{λ_i} et $C_{j(i)}$ sont compacts, le minimum des $\sum |x'_i, x_{i+1}|$ est atteint. En résumé, en remplaçant la chaîne par celle minimisant $\sum |x'_i, x_{i+1}|$ parmi les chaînes avec N et (λ_i) donnés, on produit une chaîne tendue, ce qui justifie notre affirmation.

Notons θ_j l'angle dans \mathbf{D} entre c_j et l_{k+1} , en particulier $\theta_j \geq \theta_k > 0$ pour tout $j = 1, \dots, k$. Comme pour les i pairs nous avons $j(i) = \infty$, l'angle dans la définition d'une chaîne tendue décroît à chaque i successif par au moins θ_k . Précisément, pour i impair, si $c_{j(i)} = l_{j(i)}$ alors en travaillant dans le triangle euclidien de sommets O, x_i, x_{i+1} on voit que l'angle décroît exactement de $\theta_{j(i)}$, et, par convexité de $C_{j(i)}$, dans le cas général la perte d'angle est encore plus grande (voir figure 7.2). Le cas i pair est similaire. Ainsi $N - 4 < \frac{\pi}{\theta_k}$. Pour $i = 0, \dots, N - 1$, il existe des $z_i \in \varphi_{\lambda_{i-1}}(c_{j(i)}^m)$ avec $|x_i, z_i| < \frac{1}{m}$. En utilisant cette chaîne de z_i au lieu des x_i , on obtient $d_m([x]_{\sim_m}, [y]_{\sim_m}) \leq l + \frac{1}{m} + 2N \frac{1}{m}$. Alors en prenant $M \geq 1 + 2(\frac{\pi}{\theta_k} + 4)$ on obtient l'estimé attendu. \square

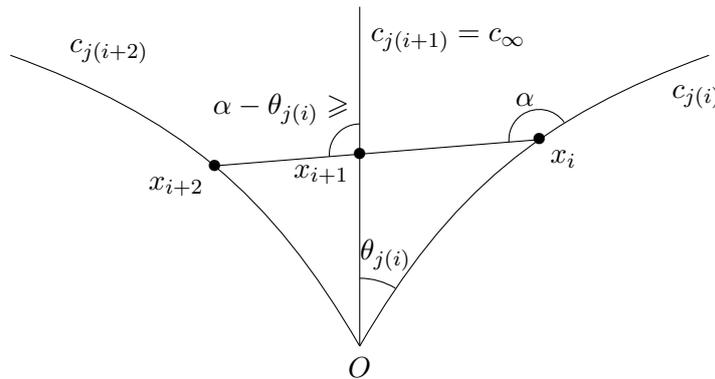


FIGURE 7.2 – Perte d'angle dans le lemme 7.6.

7.2. Preuve de la proposition

La preuve de la proposition 7.1 va être différente suivant la forme de $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Par le corollaire 2.5(ii), on peut supposer $g = \text{id}$ et $\alpha \in \Pi^+$.

Notons $\mathcal{F} = \text{Stab}(\nu_{\text{id}, [\alpha]})$, qui nous servira d'ensemble d'indices tout au long de cette section. Observons que \mathcal{F} est l'ensemble des $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ tel que \mathbf{E}_f^+ contienne $\nu_{\text{id}, [\alpha]}$. Soit

$$\mathbf{V} := \bigsqcup_{f \in \mathcal{F}} \overline{B}(\nu_{f, [\alpha]}, \frac{\varepsilon}{4}) / \sim$$

le voisinage du lemme 5.5(b). Ainsi \mathbf{V} est isométrique à la boule $\overline{B}_{\mathbf{X}}(\nu_{\text{id}, [\alpha]}, \frac{\varepsilon}{4})$.

Observons que si $\text{mult}(\alpha) \leq 1$, et $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ (resp. $\alpha_1 = \alpha_2$ ou $\alpha_2 = \alpha_3$), ce voisinage \mathbf{V} s'obtient en recollant des disques (resp. des demi-disques) le long d'un même convexe, donné par le lemme 5.1 (resp. correspondant au diamètre des demi-disques). On conclut dans ce cas que \mathbf{V} est CAT(0) par [BH99, II.11.3]. Nous supposons donc dans la suite $\text{mult}(\alpha) \geq 2$.

7.2.1. Premier cas : $\alpha_1 = \alpha_2$

Dans cette situation on a $[\alpha] = [p, p, 1]$ pour un entier $p \geq 1$, et il y a exactement trois droites admissibles passant par $[\alpha]$. Ces droites sont principales, donc par la remarque 5.2 ce sont encore des droites pour la distance $|\cdot, \cdot|$, formant 6 secteurs chacun d'angle $\pi/3$. Le voisinage \mathbf{V} est donc un cône sur un graphe métrique Γ dont chaque arête est de longueur $\pi/3$. En particulier, on n'a pas un plongement isométrique $\Gamma \rightarrow \mathbf{V}$, mais on a malgré tout une action induite naturelle de $\text{Stab}(\nu_{\text{id}, [\alpha]})$ sur Γ . Pour montrer que \mathbf{V} est CAT(0), par le théorème 7.2 il suffit de montrer que Γ est CAT(1), ce qui revient à dire que tout cycle plongé dans Γ est formé d'au moins 6 arêtes.

Pour $p = 1$, par le lemme 3.4 le graphe Γ est l'immeuble sphérique de Bruhat–Tits de $\text{GL}_3(\mathbb{k})$, autrement dit le graphe d'incidence des points et des droites du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{k})$, donc chaque cycle plongé dans Γ compte bien au moins 6 arêtes.

Supposons maintenant $p \geq 2$. Noter que pour chaque $f \in \mathcal{F}$ la boule $\overline{B}(\nu_{f, [\alpha]}, \frac{\varepsilon}{4}) \subset \mathbf{E}_f^+$ est un demi-disque, ou autrement dit un cône sur un chemin de 3 arêtes $\Gamma_f^+ \subset \Gamma$. L'application ρ_+ du corollaire 2.5(i) induit une application (pour laquelle on conserve la même notation) $\rho_+ : \Gamma \rightarrow I_3$, ou I_3 est un chemin de 3 arêtes — le link de $[p, p, 1]$ dans ∇^+ . Cette projection ρ_+ est un isomorphisme en restriction à chaque Γ_f^+ . Notons s l'extrémité de I_3 correspondant à la direction vers $[1, 1, 1]$ et q l'autre extrémité, correspondant à la direction vers $[1, 1, 0]$. Notons $s_f = \rho_+^{-1}(s) \cap \Gamma_f^+$, $q_f = \rho_+^{-1}(q) \cap \Gamma_f^+$ et $\Gamma_f = \Gamma_f^+ \cup \Gamma_{f\sigma}^+$ pour $\sigma = (1, 2) \in S_3$. Ainsi Γ_f est un cycle de 6 arêtes correspondant aux directions dans \mathbf{E}_f . On dira que $s_f \in \rho_+^{-1}(s)$ est le *sommet de base* de Γ_f (ou de Γ_f^+).

LEMME 7.7. —

- (i) La fibre $\rho_+^{-1}(q) \subset \Gamma$ est un singleton.
- (ii) Pour tous $f, g \in \mathcal{F}$, l'intersection $\Gamma_f \cap \Gamma_g$ est soit connexe de longueur $\leq \pi$ (c'est-à-dire formée d'au plus 3 arêtes), soit égale à $\{q_f, s_f\} = \{q_g, s_g\}$. En particulier tout cycle plongé dans $\Gamma_f \cup \Gamma_g$ est constitué d'au moins 6 arêtes.

- (iii) Chaque sommet $u \in \Gamma \setminus \rho_+^{-1}\{q, s\}$ est incident à exactement une arête e dont la projection $\rho_+(e)$ sépare $\rho_+(u)$ de q dans I_3 . De plus, si $u \in \Gamma_f^+$, alors e est aussi dans Γ_f^+ .

Démonstration. —

- (i) Pour $p' \geq p$, le poids $(p', p', 1)$ appartient à chaque demi-espace admissible contenant $(p, p, 1)$. Ainsi, par le corollaire 4.7, pour tout $f \in \mathcal{F}$ on a $q_{\text{id}} = f(q_{\text{id}}) = q_f$. Donc $q_f = q_g$ pour chaque $f, g \in \mathcal{F}$, comme attendu.
- (ii) Supposons que $\Gamma_f \cap \Gamma_g$ n'est ni $\{q_f, s_f\}$ ni $\{q_f\}$. Alors il existe $\omega \in \{\text{id}, \sigma\}$ avec $\Gamma_f \cap \Gamma_{g\omega}^+ \neq \{q_f, s_f\}, \{q_f\}$. Ainsi on peut appliquer le corollaire 3.6 à $f' = \omega^{-1}g^{-1}f$, d'où l'existence d'une permutation $\sigma' \in S_n$ tel que $\mathbf{E}_{f'} \cap \mathbf{E}_{\text{id}} = \text{Fix}(f'\sigma') \cap \mathbf{E}_{\text{id}}$. Par la proposition 4.4, l'ensemble $\text{Fix}(f'\sigma') \cap \mathbf{E}_{\text{id}}$ est une intersection d'hyperplans admissibles. Donc $\Gamma_{f'} \cap \Gamma_{\text{id}} = \text{Fix}(f'\sigma') \cap \Gamma_{\text{id}}$ est une intersection de chemins de longueur π . En faisant agir $g\omega$ on obtient la même propriété pour $\Gamma_f \cap \Gamma_{g\omega} = \Gamma_f \cap \Gamma_g$. Par (i) l'intersection $\Gamma_f \cap \Gamma_g$ contient q_f et on a supposé qu'elle était distincte de $\{q_f, s_f\}$, elle est donc connexe de longueur $\leq \pi$.
- (iii) Soit f tel que $u \in \Gamma_f^+$, et considérons l'arête incidente à $\rho_+(u)$ qui sépare ce sommet de q dans I_3 . Sa préimage e dans Γ_f^+ satisfait la condition annoncée. Supposons que e' est une autre arête dans Γ_g^+ satisfaisant cette condition. Alors $\Gamma_f \cap \Gamma_g$ contient q_f et u mais ne contient pas e . Cela contredit (ii). \square

LEMME 7.8. — *Supposons que $s_f = s_{f'}$ pour certains $f, f' \in \mathcal{F}$. Alors il existe $f'' \in \mathcal{F}$ tel que $\Gamma_f^+, \Gamma_{f'}^+ \subset \Gamma_{f''}$.*

Démonstration. — Par le corollaire 2.5(ii) on peut supposer $f = \text{id}$. Par la proposition 3.2, on peut écrire $f' = hg$ avec $h \in M_\alpha, g \in L_\alpha$. Observons que s_{id} est fixé par tout élément de L_α , et également par hypothèse par $f' = hg$. Ainsi on obtient que h fixe s_{id} , ce qui revient à dire que h fixe $\nu_{\text{id}, [p-1, p-1, 1]}$. Donc, par la proposition 3.2, et au vu de la description de M_α donnée dans l'exemple 3.1(iv), h est un automorphisme triangulaire de la forme $(x_1 + P(x_3), x_2 + Q(x_3), x_3 + d)$ avec $p - 1 \geq \deg P, \deg Q$. Toujours par la proposition 3.2, h fixe toute valuation de \mathbf{E}_{id}^+ dont le poids $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ satisfait l'inégalité $\alpha'_2 \geq (p - 1)\alpha'_3$. En particulier h fixe un voisinage de $\nu_{\text{id}, [p, p, 1]}$ dans \mathbf{E}_{id}^+ , et donc h fixe les trois arêtes de Γ_{id}^+ .

Écrivons $g = b_1\sigma b_2$ la décomposition de Bruhat de g , où b_1, b_2 sont triangulaires supérieures, et $\sigma = (1, 2)$ ou id . Alors $f'' = hb_1$ convient, en effet :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{id}}^+ &= h\Gamma_{\text{id}}^+ = h\Gamma_{b_1}^+ = \Gamma_{hb_1}^+, \text{ et} \\ \Gamma_{hg}^+ &= hb_1\sigma\Gamma_{b_2}^+ = hb_1\sigma\Gamma_{\text{id}}^+ \subset hb_1\Gamma_{\text{id}}^+ = \Gamma_{hb_1}. \end{aligned} \quad \square$$

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du premier cas :

PROPOSITION 7.9. — *Si $\alpha = (p, p, 1)$ avec $p \geq 2$ un entier, alors Γ est CAT(1).*

Démonstration. — Soit γ un cycle plongé dans Γ . Orientons chaque arête e de γ de manière que sa projection $\rho_+(e) \subset I_3$ soit orientée vers s . Par le lemme 7.7(iii), le cycle γ se décompose en un nombre pair de chemins orientés dont chacun se termine sur un sommet de base. De plus, chaque tel chemin est contenu dans un Γ_f^+ . Si γ

est constitué d'au plus 5 arêtes, alors il contient au plus 2 sommets de base. Par le lemme 7.8, il existe $f, g \in \mathcal{F}$ tels que ces deux sommets soient s_f, s_g , et $\gamma \subset \Gamma_f \cup \Gamma_g$. Cela contredit le lemme 7.7(ii). \square

7.2.2. Deuxième cas : $\alpha_1 > \alpha_2 = \alpha_3$

Dans cette situation l'hypothèse $\text{mult}(\alpha) \geq 2$ implique $[\alpha] = [p, 1, 1]$ pour un entier $p \geq 2$. Par la remarque 4.10, $[\alpha]$ est contenu dans $p + 2 \geq 4$ droites admissibles, dont seulement 3 sont principales.

Soit $\mathbf{D} \subset \nabla^+$ le demi-disque de centre $[\alpha]$ et rayon $\varepsilon/4$ pour la distance $|\cdot, \cdot|$. Pour $f \in \mathcal{F}$, soient φ_f l'isométrie identifiant \mathbf{D} avec le demi-disque $\mathbf{D}_f := \overline{B}(\nu_{f, [\alpha]}, \frac{\varepsilon}{4})$ dans \mathbf{E}_f^+ . Ainsi le voisinage \mathbf{V} discuté plus haut s'écrit $\mathbf{V} = \bigsqcup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{D}_f / \sim$. Noter que les droites admissibles non principales passant par $[\alpha]$ ne sont plus des droites pour la distance $|\cdot, \cdot|$. En particulier \mathbf{V} n'est plus un cône, et pour nous ramener à cette situation nous allons utiliser le cadre décrit dans la section 7.1.

Notons c_1, \dots, c_{p+1} la trace sur le demi-disque \mathbf{D} des droites admissibles, sauf la droite principale $\alpha_2 = \alpha_3$ (qui correspondrait au diamètre de \mathbf{D}). Noter que chacune de ces courbes c_i admet $[\alpha]$ pour extrémité. Dans la distance euclidienne $|\cdot, \cdot|$ ces courbes ne sont plus en général des segments de droites (précisément, ce sont encore des droites si et seulement si elles proviennent d'une droite principale), et on note l_i le rayon de \mathbf{D} tangent à c_i au point $[\alpha]$. On note $C_i \subset \mathbf{D}$ le convexe délimité par c_i , trace sur \mathbf{D} du demi-espace admissible associé à c_i , et $L_i \subset \mathbf{D}$ le secteur délimité par le rayon tangent l_i et contenant C_i . On numérote les c_i de façon à ce que les C_i forment une famille croissante de convexes. En particulier, c_1 et c_{p+1} sont les deux seuls segments de droites principales parmi les c_i . Quitte à diminuer ε , pour chaque $i = 1, \dots, p + 1$ on peut supposer $c_i \cap l_{i-1} = [\alpha]$, où par convention l_0 est le rayon au bord de \mathbf{D} contenu dans chaque C_i . Il sera aussi utile de noter l_{p+2} l'autre rayon bordant \mathbf{D} . Observer que tout ceci correspond aux conventions de la section 7.1 et de la figure 7.1 en prenant $k = p + 1$.

Soit $f, g \in \mathcal{F}$. Par le corollaire 2.7 et la proposition 4.4, $\rho_+(\mathbf{D}_f \cap \mathbf{D}_g)$ est ou bien un des convexes C_i , ou bien le demi-disque \mathbf{D} entier, ou bien son diamètre. Ainsi on est ramené au cadre de la section 7.1, où on a introduit le « quotient linéarisé » \mathbf{V}_0 de \mathbf{V} , qui est un cône sur un graphe métrique Γ_0 . En tant que graphe, Γ_0 est isomorphe au link de $\nu_{\text{id}, [\alpha]}$ dans \mathbf{X} vu comme un complexe polygonal déterminé par les droites admissibles. Soit e une arête de Γ_0 correspondant à une région délimitée par deux courbes de \mathbf{X} envoyées par ρ_+ sur c_i, c_{i+1} . Alors la longueur de e dans Γ_0 est égale à l'angle entre c_i, c_{i+1} pour la distance $|\cdot, \cdot|$. Par la proposition 7.5 (et à nouveau par le théorème 7.2) pour montrer que \mathbf{V} est CAT(0) il suffit de montrer :

PROPOSITION 7.10. — Si $\alpha = (p, 1, 1)$ avec $p \geq 2$ un entier, alors Γ_0 est CAT(1).

Soit $\Gamma_f^+ \subset \Gamma_0$ le chemin correspondant au demi-disque $\mathbf{D}_f \subset \mathbf{E}_f^+$. Appelons *sommet de base* de Γ_f^+ , noté s_f , l'extrémité de Γ_f^+ correspondant à la direction vers $[1, 1, 1]$. Notons $\Gamma_f = \Gamma_f^+ \cup \Gamma_{f\sigma}^+$ pour $\sigma = (2, 3) \in S_3$.

Remarque 7.11. — Soit s_f un point base. Toute arête de Γ_0 issue de s_f est de longueur $\pi/3$, car correspond après projection à l'angle entre les deux segments de droites principales $c_{p+1} = l_{p+1}$ et l_{p+2} .

Preuve de la proposition 7.10. — Notons que le lemme 7.8 reste vrai avec Γ_0 au lieu de Γ : dans la preuve il suffit de remplacer $\sigma = (1, 2)$ par $(2, 3)$ et h par un automorphisme de la forme $(x_1 + P(x_2, x_3), x_2 + d, x_3 + d')$ où $p > \deg P$. De même, l'analogie du lemme 7.7 reste valable.

La preuve est maintenant identique à la preuve de la proposition 7.9, excepté que c'est maintenant la remarque 7.11 qui permet d'affirmer que si un cycle $\gamma \subset \Gamma_0$ est de longueur $< 2\pi$, alors il contient au plus 2 sommets de base. \square

7.2.3. Troisième cas : $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$

Comme précédemment, soit Γ_0 le link de $[\alpha]$ dans \mathbf{X} avec la structure polygonale déterminée par les droites admissibles. On a une projection $\rho_+ : \Gamma_0 \rightarrow S^1$ vers le cercle combinatoire correspondant au link de $[\alpha]$ dans ∇^+ . Nous munissons les arêtes de S^1 (et de Γ_0 via ρ_+^{-1}) des longueurs venant des angles entre les droites admissibles (devenues courbes) relativement à la distance $|\cdot, \cdot|$. Soit $q \in S^1$ (resp. $s \in S^1$) le point correspondant à la direction vers $[1, 0, 0]$ (resp. à la direction opposée, c'est-à-dire vers $[0, \alpha_2, \alpha_3]$). Soit $I \subset S^1$ le chemin de q à s , de longueur π , correspondant au demi-espace $\frac{\alpha_2'}{\alpha_3'} \geq \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$. Enfin, notons $e^q \subset S^1$ (resp. $e^s \subset S^1$) l'arête qui contient le chemin de longueur $\frac{\pi}{3}$ dans I commençant en q (resp. en s) : voir figure 7.3.

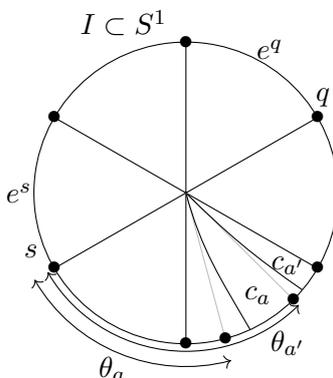


FIGURE 7.3 – Les notations du cas $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ (dans la situation où s et q sont des sommets, et e^s, e^q sont de longueur exactement $\pi/3$).

Pour tout $f \in \mathcal{F}$, notons $\Gamma_f \subset \Gamma_0$ le cycle de longueur 2π induit par \mathbf{E}_f^+ , et notons $s_f, q_f, e_f^q \subset \Gamma_f$ les préimages respectives par ρ_+ de s, q, e^q . Grâce au corollaire 2.7 et à la proposition 4.4, pour tout couple $f, g \in \mathcal{F}$, ou bien $\Gamma_f = \Gamma_g$, ou bien $\Gamma_f \cap \Gamma_g$ est un chemin de longueur $\leq \pi$ contenant $e_f^q = e_g^q$. En particulier, $\Gamma_f \cup \Gamma_g$ ne contient pas de cycle plongé de longueur $< 2\pi$. Noter que q_f et s_f ne sont pas nécessairement des sommets (précisément, ce sont des sommets si et seulement si α_2 est un multiple entier de α_3), donc on appelle les s_f les *points de base*. Similairement à la remarque 7.11, le chemin de longueur $\frac{2\pi}{3}$ dans Γ_f centré en s_f ne contient aucun sommet distinct de s_f dans son intérieur.

Notons que par la proposition 7.5, la proposition suivante entraîne que \mathbf{V} est $\text{CAT}(0)$, ce qui terminera la preuve de la proposition 7.1. Ici, on représente \mathbf{V} comme une union de demi-disques en coupant chaque disque $\overline{B}(\nu_{f, [\alpha]}, \frac{\varepsilon}{4}) \subset \mathbf{E}_f^+$ le long du diamètre de direction $\frac{\alpha'_2}{\alpha'_3} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$.

PROPOSITION 7.12. — *Si $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$, alors Γ_0 est $\text{CAT}(1)$.*

Démonstration. — Supposons que $\gamma \subset \Gamma_0$ soit un cycle plongé de longueur $< 2\pi$. Orientons comme dans la preuve de la proposition 7.9 chaque arête de γ ne contenant ni un point de base ni un q_f de manière que sa projection dans $S^1 \setminus q$ soit orientée vers s . Nous divisons chaque arête de γ contenant un point de base s_f (resp. un q_f) en deux parties orientées vers s_f (resp. dans le sens opposé à q_f). Comme dans les cas précédents, γ se décompose alors en un nombre pair de chemins orientés dont chacun se termine sur un point de base. Chaque tel chemin est contenu dans un Γ_f et contribue par au moins $\frac{\pi}{3}$ à la longueur de γ . S'il n'y en a que 2, $\gamma \subset \Gamma_f \cup \Gamma_g$ pour certains $f, g \in \mathcal{F}$ et on a vu plus haut que c'était impossible. Ainsi on peut supposer que γ se décompose en 4 chemins se terminant sur 2 points de base $s_f \neq s_g$, pour certains $f, g \in \mathcal{F}$. Observons également que $q \notin \rho_+(\gamma)$, car sinon au moins 2 de ces chemins seraient de longueur π .

Si s est un sommet, vu que $\rho_+^{-1}(e^q)$ est une seule arête, similairement au lemme 7.7 (iii) on démontre l'énoncé suivant : il y a exactement une arête e_f^s (resp. e_g^s) incidente à s_f (resp. s_g) dont la projection sépare s de q dans I . En particulier $e_f^s \subset \Gamma_f, e_g^s \subset \Gamma_g$. Ainsi, si γ passe par e_f^s , la projection $\gamma \rightarrow S^1$ est localement injective autour de s_f . Puisque $q \notin \pi(\gamma)$ cela entraîne que e_g^s est aussi contenue dans γ . Par conséquent $\gamma \subset \Gamma_f \cup \Gamma_g$, contradiction. Si s n'est pas un sommet, les arêtes entières contenant s_f, s_g sont évidemment empruntées par γ et on obtient une contradiction de la même manière.

Ainsi on peut supposer que s est un sommet et que ni e_f^s , ni e_g^s ne sont contenues dans γ , autrement dit $\rho_+(\gamma) \subset S^1 \setminus \text{int } I$. Puisque s est un sommet, α satisfait une équation admissible de la forme $\alpha_2 = p\alpha_3$, où s correspond à la demi-droite principale l vers $[0, p, 1]$. Par la remarque 4.9, $[\alpha] = [m, p, 1]$ pour des entiers $m > p > 1$. Écrivons $m = pq + r$, avec $0 \leq r < p$. Il existe donc $f_0, \dots, f_3 \in \mathcal{F}$ tels que

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1^{-1} \cup \gamma_2 \cup \gamma_3^{-1}$$

où chaque γ_i est un chemin dans Γ_{f_i} , orienté comme précédemment. En particulier

$$\rho_+(\gamma_0 \cap \gamma_1) = \rho_+(\gamma_2 \cap \gamma_3) = s.$$

Par la remarque 4.10, les points $\rho_+(\gamma_1 \cap \gamma_2), \rho_+(\gamma_3 \cap \gamma_0)$ correspondent aux directions vers $[m - pa, 0, 1]$ et $[m - pa', 0, 1]$, pour certains entiers $0 \leq a, a' \leq q$. Soient $c_a, c_{a'} \subset \nabla$ les demi-droites issues de $[\alpha]$ correspondant à ces directions. Soit θ_a (resp. $\theta_{a'}$) l'angle entre l et c_a (resp. l et $c_{a'}$) relativement à la distance $|\cdot, \cdot|$ (pour laquelle $c_a, c_{a'}$ deviennent des courbes). Quitte à faire une permutation cyclique des γ_i on peut supposer $a \geq a'$, ce qui équivaut à $\theta_a \leq \theta_{a'}$. La longueur de γ étant $2(\theta_a + \theta_{a'})$, pour obtenir une contradiction il suffit de montrer $\theta_a + \theta_{a'} \geq \pi$. Nous allons obtenir cette inégalité sous la forme $(\theta_a - \pi/3) + (\theta_{a'} - \pi/3) \geq \pi/3$ (voir figure 7.3).

En utilisant le corollaire 2.5(ii) on peut supposer $f_0 = \text{id}$. Par le lemme 4.11 (i), on peut supposer aussi $f_1, f_2, f_3 \in M_\alpha$. D'après le lemme 4.12, on peut écrire

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0^{-1} f_1 \sim_\nu h_0, & f_1^{-1} f_2 &\sim_\nu h_1, \\ f_2^{-1} f_3 &\sim_\nu h_2, & f_3^{-1} &= f_3^{-1} f_0 \sim_\nu h_3, \end{aligned}$$

où les h_i sont des automorphismes triangulaires de la forme suivante :

$$\begin{aligned} h_0 &= (x_1, x_2 + d'x_3^p, x_3), & h_1 &= (x_1 + P_1(x_2, x_3), x_2, x_3), \\ h_2 &= (x_1, x_2 + dx_3^p, x_3), & h_3 &= (x_1 + P_3(x_2, x_3), x_2, x_3), \end{aligned}$$

avec P_1, P_3 homogènes de degré m relativement aux variables x_2, x_3 de poids respectifs $p, 1$. Par le lemme 4.11 (iii), le groupe N_α est normal dans M_α , donc $h_0 h_1 h_2 h_3 \sim_\nu \text{id}$. Ainsi

$$h_0 h_1 h_2 h_3 = (x_1 + P(x_2, x_3), x_2 + Q(x_3), x_3)$$

avec $-\nu(P) < m, \deg Q = -\nu(Q) < p$. On a $Q(x_3) = (d + d')x_3^p$, donc $d + d' = 0$. Puisque P_1, P_3 sont homogènes de degré m , P l'est aussi, donc $P = 0$ et $P_1(x_2 + dx_3^p, x_3) = -P_3(x_2, x_3)$. On écrit

$$\begin{aligned} P_3(x_2, x_3) &= x_2^a (x_2 + dx_3^p)^b R_3(x_2, x_3) \\ P_1(x_2, x_3) &= x_2^{a'} (x_2 - dx_3^p)^{b'} R_1(x_2, x_3) \end{aligned}$$

où R_3 est premier avec x_2 et $x_2 + dx_3^p$, et R_1 est premier avec x_2 et $x_2 - dx_3^p$. Noter que par le lemme 4.12 (i), les exposants a et a' correspondent bien aux entiers définissant les demi-droites c_a et $c_{a'}$ introduites plus haut. L'égalité $P_1(x_2 + dx_3^p, x_3) = -P_3(x_2, x_3)$ équivaut à

$$(x_2 + dx_3^p)^{a'} x_2^{b'} R_1(x_2 + dx_3^p, x_3) = -x_2^a (x_2 + dx_3^p)^b R_3(x_2, x_3).$$

Finalement $a' = b$, et $pa + pa' = p(a + b) \leq m$. On conclut grâce au lemme 5.9 que $(\theta_a - \pi/3) + (\theta_{a'} - \pi/3) \geq \pi/3$, d'où la contradiction attendue. Précisément, dans le cas d'égalité $p(a + a') = m$, les rayons c_2, c_3 du lemme 5.9 correspondent respectivement aux demi-droites $c_a, c_{a'}$, et on obtient $\theta_a = \pi/3 + \theta_{12}, \theta_{a'} = \pi/3 + \theta_{13}$, et $(\theta_a - \pi/3) + (\theta_{a'} - \pi/3) = \pi/3$. Le cas d'une inégalité stricte $p(a + a') < m$ correspond à des angles $\theta_a, \theta_{a'}$ plus grands, et donc est encore plus favorable. \square

Dans la preuve de la proposition 7.5 une bonne part des complications vient du fait que $d_{\mathbf{X}}$ n'est pas la distance de la structure polygonale de \mathbf{X} , ce qui nous oblige à d'abord linéariser la situation avant de pouvoir conclure en étudiant le link de chaque point. Il semblerait *a priori* naturel de vouloir garder la distance du simplexe, pour laquelle toutes les droites admissibles, principales ou non, sont bien des droites. Nous concluons cette section avec un exemple qui montre le problème avec cette approche.

Exemple 7.13 (figure 7.4). — Soient $p, q \geq 1$ deux entiers, et notons $m = pq, \alpha = (m, p, 1), \nu = \nu_{\text{id}, [\alpha]}$. Les automorphismes

$$f = (x_1 + x_2^q, x_2, x_3) \quad \text{et} \quad g = (x_1 + x_3^m, x_2, x_3)$$

appartiennent au groupe $M_\alpha \subset \text{Stab}(\nu)$, et commutent. En parcourant quatre arcs de cercles centrés en ν dans les appartements successifs $\mathbf{E}_{\text{id}}, \mathbf{E}_f, \mathbf{E}_{fg}$ et \mathbf{E}_g , où les

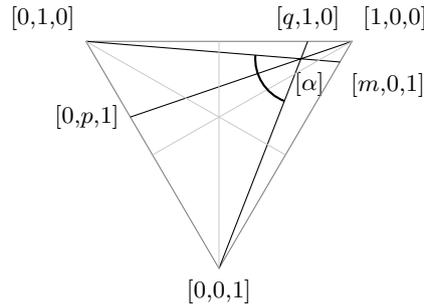


FIGURE 7.4 – Un arc de longueur $2\pi/3$ pour la métrique $|\cdot, \cdot|$, mais de longueur $\pi/3 + \varepsilon$ pour la métrique du simplexe.

poids varient entre les demi-droites principales dirigées vers $[0, 0, 1]$ et $[0, 1, 0]$, on obtient un cycle. Pour la distance du graphe Γ_0 correspondant au link du voisinage linéarisé \mathbf{V}_0 , chacun de ces arcs est de longueur $2\pi/3$, et donc le lacet est de longueur totale $8\pi/3 > 2\pi$. En revanche, si l'on utilise la distance du simplexe, chacun de ces arcs est de longueur $\pi/3 + \varepsilon$ avec ε tendant vers 0 quand q tend vers l'infini, et ainsi on produit des lacets de longueur $4\pi/3 + 4\varepsilon < 2\pi$. On voit que munir chaque appartement de la distance du simplexe conduirait à une distance sur \mathbf{X} qui ne serait plus localement CAT(0).

8. Preuve des résultats principaux

Nous obtenons d'abord le théorème 1.1 annoncé dans l'introduction :

Preuve du théorème 1.1. — On sait déjà que l'espace métrique \mathbf{X}_3 est complet par le lemme 5.8. De plus \mathbf{X}_3 est simplement connexe par la proposition 6.3, et localement CAT(0) par la proposition 7.1. Le résultat découle alors du théorème de Cartan–Hadamard [BH99, II.4.1 (2)], qui affirme qu'un espace métrique complet, localement CAT(0) et simplement connexe est CAT(0). \square

Pour obtenir la linéarisabilité des sous-groupes finis, nous utilisons le critère suivant, qui repose sur un argument de moyennisation. Ici on profite de la structure vectorielle de \mathbb{k}^n pour définir un endomorphisme par moyenne d'automorphismes (en général une telle moyenne n'a pas de raison d'être inversible).

LEMME 8.1 ([BFL14, Lemma 5.1]). — *Soit \mathbb{k} un corps de caractéristique zéro, et G un sous-groupe du groupe des bijections de \mathbb{k}^n admettant une structure de produit semi-direct $G = M \rtimes L$ avec $L \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{k})$. Supposons que pour toute suite finie m_1, \dots, m_r de M , la moyenne $\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r m_i$ est encore dans M . Alors tout sous-groupe fini de G est conjugué par un élément de M à un sous-groupe de L .*

Preuve du corollaire 1.2. — En fait, on va montrer que chaque sous-groupe fini F de $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ est conjugué par un élément de $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ (est pas seulement de $\text{Aut}(\mathbb{k}^3)$) à un sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{k})$.

Le groupe $F \subset \text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ agit par isométries sur \mathbf{X}_3 , qui est complet CAT(0) par le théorème 1.1. Par [BH99, II.2.8 (1)], F admet (au moins) un point fixe global

$\nu \in \mathbf{X}_3$, que l'on peut construire comme le « circumcenter » d'une orbite quelconque. Par le corollaire 2.5(ii), en conjuguant par un élément de $\text{Tame}(\mathbb{k}^3)$ nous pouvons supposer que $\nu = \nu_{\text{id}, [\alpha]} \in \mathbf{E}_{\text{id}}^+$. Par la proposition 3.2, $F \subset \text{Stab}(\nu) = M_\alpha \rtimes L_\alpha$. On constate immédiatement que le groupe d'automorphismes triangulaires M_α est stable par moyenne, on peut donc conclure grâce au lemme 8.1. \square

9. Appendice : autres propriétés de \mathbf{X}

9.1. Fidélité de l'action

PROPOSITION 9.1. — *L'action de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$ sur \mathbf{X} est fidèle.*

Démonstration. — Soit f un élément non trivial de $\text{Tame}(\mathbb{k}^n)$. On veut montrer que l'application induite par f sur \mathbf{X} n'est pas l'identité. Supposons que f agisse trivialement sur l'appartement standard \mathbf{E}_{id} (sinon il n'y a rien à montrer). Alors par le corollaire 3.3,

$$f = (c_1x_1 + t_1, c_2x_2 + t_2, \dots).$$

Comme f est non trivial, en conjuguant par un élément du groupe symétrique, nous pouvons de plus supposer que l'on n'est pas dans le cas $c_1 = c_2 = 1$ et $t_1 = t_2 = 0$.

Soit $r \geq 2$ un entier premier avec la caractéristique de \mathbb{k} . Considérons $g = (x_1 - x_2^r, x_2, \dots, x_n)$ et $\alpha \in \Pi$, et comparons $\nu = \nu_{g, \alpha}$ et $f \cdot \nu$ en évaluant ces valuations sur le polynôme $P = x_1 + x_2^r$. On a

$$\begin{aligned} -\nu(x_1 + x_2^r) &= \alpha_1; \\ -(f \cdot \nu)(x_1 + x_2^r) &= -\nu(c_1x_1 + t_1 + (c_2x_2 + t_2)^r) \\ &= -\nu_{\text{id}, \alpha}(c_1x_1 - c_1x_2^r + t_1 + c_2^rx_2^r + rc_2^{r-1}t_2x_2^{r-1} + \dots + t_2^r) \\ &= \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } c_2^r = c_1, t_2 = 0, \\ \max\{\alpha_1, (r-1)\alpha_2\} & \text{si } c_2^r = c_1, t_2 \neq 0 \\ \max\{\alpha_1, r\alpha_2\} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, sauf dans le premier cas, les deux valuations sont distinctes dès que $\alpha_2 > \alpha_1$, et dans ce cas leurs classes d'homothétie sont distinctes car par ailleurs $-\nu(x_2) = -(f \cdot \nu)(x_2) = \alpha_2$.

Considérons pour finir le cas où $c_2^r = c_1$ et $t_2 = 0$. Si $c_1^r \neq c_2$, ou si $t_1 \neq 0$, on peut reproduire l'argument précédent après avoir conjugué par la transposition qui échange x_1 et x_2 . Sinon, on a $t_1 = t_2 = 0$, et $c_1^r = c_2$ et $c_2^r = c_1$ pour tout entier r premier avec la caractéristique de \mathbb{k} . Mais ceci implique $c_1 = c_2 = 1$: si car $\mathbb{k} \neq 2$, les équations $c_1^2 = c_2$, $c_2^2 = c_1$ plus une équation supplémentaire $c_1^r = c_2$ avec $r \equiv 1 \pmod 3$ suffisent déjà, et si car $\mathbb{k} = 2$ cela découle des deux équations $c_1^3 = c_2$, $c_1^5 = c_2$. Dans tous les cas on obtient une contradiction, ce qui conclut la preuve. \square

9.2. Une application de rétraction

La preuve de la proposition 6.3 est une version algébrique d'une première approche topologique qui nous a finalement semblé plus délicate à mettre au point. L'idée

est de construire en toute dimension n une application naturelle, candidate à être une équivalence d'homotopie, depuis \mathbf{X}_n vers un complexe simplicial \mathbf{Y}_n étudié dans [Lam19, LP19]. Nous indiquons rapidement la construction, qui mène à des questions intéressantes et qui met également mieux en lumière le rôle clé joué par la théorie des réductions de Shestakov–Umirbaev et Kuroda (encapsulée plus haut dans le théorème 6.4, et ici dans la simple connexité de \mathbf{Y}_3).

Rappelons d'abord la construction du complexe simplicial qui était noté \mathcal{C}_n dans [Lam19], mais que nous noterons ici \mathbf{Y}_n afin d'éviter toute confusion avec le complexe de groupes utilisé plus haut. Pour tout $1 \leq r \leq n$, nous appelons r -uplet de composantes un morphisme

$$f: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^r$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_r(x))$$

qui peut s'étendre en un automorphisme modéré $f = (f_1, \dots, f_n)$ de \mathbb{k}^n . On définit n types distincts de sommets, en considérant des r -uplets de composantes modulo composition par un automorphisme affine au but, $r = 1, \dots, n$:

$$[f_1, \dots, f_r] := A_r(f_1, \dots, f_r) = \{a \circ (f_1, \dots, f_r); a \in A_r\}$$

où $A_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{k}) \ltimes \mathbb{k}^r$ est le groupe affine en dimension r . Nous dirons que $[f_1, \dots, f_r]$ est un sommet de *type* r . Ensuite, pour tout automorphisme modéré $(f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{Tame}(\mathbb{k}^n)$ nous attachons un $(n - 1)$ -simplexe sur les sommets $[f_n], [f_{n-1}, f_n], \dots, [f_1, \dots, f_n]$. Cette définition ne dépend pas d'un choix de représentants, et produit un complexe simplicial $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_n$ de dimension $(n - 1)$ sur lequel le groupe modéré agit par isométries, via

$$g \cdot [f_1, \dots, f_r] := [f_1 \circ g^{-1}, \dots, f_r \circ g^{-1}].$$

Exemple 9.2. — Le complexe \mathbf{Y}_2 est l'arbre de Bass–Serre du scindement $\mathrm{Aut}(\mathbb{k}^2) = A_2 *_{A_2 \cap E_2} E_2$, où A_2 est le groupe affine et $E_2 = \{(ax_1 + P(x_2), bx_2 + d); a, b \neq 0\}$. En caractéristique nulle, le complexe \mathbf{Y}_3 est le développement universel du triangle de groupes A, B, C et de leurs intersections (voir théorème 6.4).

On paramétrise le simplexe $[x_n], [x_{n-1}, x_n], \dots, [x_1, \dots, x_n]$ de la manière suivante. Soit $\Delta \subset \Pi \subset \mathbb{R}^n$ le $(n - 1)$ -simplexe de sommets

$$v_1 = (2, \dots, 2, 1), v_2 = (2, \dots, 2, 1, 1), \dots, v_n = (1, \dots, 1, 1).$$

On définit $\iota: \Delta \rightarrow \mathbf{Y}$ comme l'application affine envoyant chaque v_r sur le sommet de type r $[x_{n-r+1}, \dots, x_n]$. Notons que $\Delta \subset \Pi^+$ s'identifie par projectivisation à un simplexe de ∇^+ que l'on note encore Δ .

On définit maintenant une rétraction $\nabla^+ \rightarrow \Delta$. Soit $\alpha \in \Pi^+$. Nous définissons un nouveau poids $\alpha' \in \Delta$ en posant, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\alpha'_i = \min(2, \alpha_i/\alpha_n),$$

qui ne dépend que de $[\alpha] \in \nabla^+$. On définit $\pi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ par $\pi(\nu_{f, [\alpha]}) = f \cdot \iota(\alpha')$. L'application π envoie la chambre $\mathbf{E}_{\mathrm{id}}^+$ sur le simplexe $[x_n], [x_{n-1}, x_n], \dots, [x_1, \dots, x_n]$. La figure 9.1 illustre l'effet de π dans le cas $n = 3$.

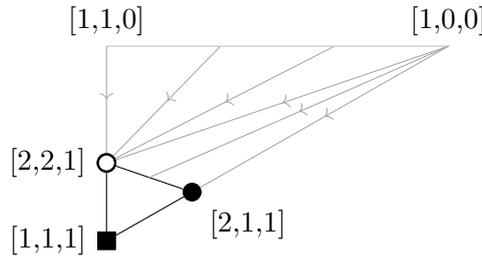


FIGURE 9.1 – L’application π en restriction à une chambre de \mathbf{X}_3 .

LEMME 9.3. — Si $\nu_{g, [\alpha]} = \nu_{f, [\beta]}$, alors $f \cdot \iota(\alpha') = g \cdot \iota(\beta')$. En particulier π est une application bien définie de \mathbf{X} vers \mathbf{Y} .

Démonstration. — Par la proposition 2.4, on peut supposer $g = \text{id}$ et $\beta = \alpha$. On a donc $\nu_{\text{id}, [\alpha]} = \nu_{f, [\alpha]}$ où, d’après la proposition 3.2, $f \in M_\alpha \rtimes L_\alpha$. On normalise α en demandant $\alpha_n = 1$.

Il nous faut montrer que $f \cdot \iota(\alpha') = \iota(\alpha')$. Pour cela il suffit de montrer que f fixe chaque sommet d’un simplexe contenant $\iota(\alpha')$. Considérons (i_1, \dots, i_k) la collection des indices $1 \leq i \leq n$ tels que $\alpha'_{i-1} > \alpha'_i$, où par convention, $\alpha'_0 = 2$. Remarquons que α' est une combinaison convexe des v_{i_j} , ainsi $\iota(\alpha')$ est contenu dans le simplexe de sommets v_{i_j} .

Pour chaque j les coordonnées f_{i_j}, \dots, f_n de f correspondent à un automorphisme en les variables x_{i_j}, \dots, x_n , puisque par définition de i_j on a $\alpha'_{i_j-1} > \alpha'_{i_j}$, et donc aussi $\alpha_{i_j-1} > \alpha_{i_j}$. De plus cet automorphisme est affine, car $2 > \alpha'_{i_j} = \alpha_{i_j}$. Ceci donne l’égalité centrale dans

$$f^{-1} \cdot \iota(v_{i_j}) = [f_{i_j}, \dots, f_n] = [x_{i_j}, \dots, x_n] = \iota(v_{i_j}). \quad \square$$

Remarque 9.4. — Pour tout $f = (f_1, \dots, f_n) \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, l’application π induit une bijection locale entre un voisinage de la valuation $\nu_{f^{-1}, [1, \dots, 1]}$ dans \mathbf{X} et un voisinage du sommet de type n correspondant $[f_1, \dots, f_n] \in \mathbf{Y}$.

Suivant [Lam19], rappelons que les sommets de type i à distance 1 de $[f_1, \dots, f_n]$ sont en bijection avec les sous-espaces vectoriels de dimension i de

$$\text{vect}(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n],$$

et de même les simplexes contenant $[f_1, \dots, f_n]$ correspondent aux drapeaux dans cet espace. On obtient ainsi une preuve alternative du fait que le link dans \mathbf{X}_n d’une valuation de poids $[1, \dots, 1]$ est isomorphe à l’immeuble sphérique standard de $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ (lemme 3.4).

Question 9.5. — Les fibres de π sont-elles contractiles ? Si oui, cela entraîne-t-il que π est une équivalence d’homotopie ? Une réponse positive donnerait une autre preuve de la proposition 6.3 grâce à la simple connexité de \mathbf{Y}_3 [Lam19, Proposition 5.7]. De plus, une fois le théorème 1.1 établi, cela donnerait une autre preuve du fait que \mathbf{Y}_3 est contractile (voir [LP19, Theorem A]).

9.3. Comparaison avec la notion classique d'immeuble

Nous justifions maintenant la remarque mentionnée dans l'introduction concernant le fait que le système d'appartements $\{\mathbf{E}_f \mid f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)\}$ ne fait pas de \mathbf{X} la réalisation de Davis d'un immeuble [AB08, Définitions 4.1, 12.65].

LEMME 9.6. — *Soit $f \in \text{Tame}(\mathbb{k}^n)$, et $[\alpha] \in \nabla$ distinct de $[1, \dots, 1]$ et de multiplicité au moins 1. Alors tout voisinage de $\nu_{f, [\alpha]}$ contient deux points qui n'appartiennent pas à un même appartement.*

Démonstration. — Par le corollaire 2.5(ii), sans perte de généralité on peut supposer $f = \text{id}$. Notons $\delta > 0$ le minimum des distances $|\sigma_1([\alpha]), \sigma_2([\alpha])|$ entre deux points distincts de l'orbite de $[\alpha]$ pour l'action de S_n sur ∇ . Noter que δ est bien défini car l'hypothèse $[\alpha] \neq [1, \dots, 1]$ assure que cette orbite contient au moins 2 points. Un réel $r > 0$ étant fixé, considérons un point α' du segment ouvert reliant α à $[1, \dots, 1]$ tel que $||[\alpha], [\alpha']|| \leq r$. Alors α, α' ont les mêmes symétries, c'est-à-dire que pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma(\alpha) = \alpha$ si et seulement si $\sigma(\alpha') = \alpha'$. De plus il existe un demi-espace admissible contenant α mais pas α' , et donc par la remarque 4.3 il existe $g \in \text{Stab}(\nu_{\text{id}, [\alpha]})$ ne fixant pas $\nu_{\text{id}, [\alpha']}$. Supposons qu'il existe un appartement \mathbf{E}_h contenant $\nu_{g, [\alpha']}$ et $\nu_{\text{id}, [\alpha']}$. Alors on devrait avoir des permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ telles que

$$\nu_{h, [\sigma_1(\alpha')]} = \nu_{g, [\alpha']} \neq \nu_{\text{id}, [\alpha']} = \nu_{h, [\sigma_2(\alpha')]},$$

donc $\sigma_1(\alpha') \neq \sigma_2(\alpha')$. Ceci mène à une contradiction dès que $r < \delta/4$, car en utilisant la remarque 5.7 on obtient :

$$\begin{aligned} 2r &\geq d_{\mathbf{X}}(\nu_{h, [\sigma_1(\alpha')]}, \nu_{\text{id}, [\alpha]}) + d_{\mathbf{X}}(\nu_{\text{id}, [\alpha]}, \nu_{h, [\sigma_2(\alpha')]})) \geq d_{\mathbf{X}}(\nu_{h, [\sigma_1(\alpha')]}, \nu_{h, [\sigma_2(\alpha')]})) \\ &= ||[\sigma_1(\alpha')], [\sigma_2(\alpha')]] \geq ||[\sigma_1(\alpha)], [\sigma_2(\alpha)]] - ||[\sigma_1(\alpha')], [\sigma_1(\alpha)]] - ||[\sigma_2(\alpha')], [\sigma_2(\alpha)]] \\ &\geq \delta - 2r. \end{aligned} \quad \square$$

Par contraste, par le lemme 3.4, le link d'un point de poids $[1, \dots, 1]$ est un immeuble sphérique.

De même, pour $n = 3$ on pourrait démontrer que le link de chaque valuation de poids $[p, p, 1]$ est un « hexagone généralisé », c'est-à-dire un graphe de diamètre 3 et de systole 6. En particulier ce link est un immeuble sphérique pour le système d'appartements constitué de tous les hexagones (dont certains ne sont pas la trace d'un appartement \mathbf{E}_f). Notre preuve de ce fait étant un peu longue et calculatoire nous l'omettons, mais nous souhaitons le mentionner comme motivation pour la remarque suivante.

Remarque 9.7. — On peut se demander si \mathbf{X} pourrait devenir la réalisation de Davis d'un immeuble après avoir agrandi le système d'appartements. Pour $n = 2$ c'est vrai, car \mathbf{X}_2 est un arbre complet sans feuilles (voir la section 6.2). La réponse est par contre toujours négative pour $n \geq 3$. En effet, dans la réalisation de Davis d'un immeuble euclidien de dimension ≥ 2 , par deux points passe une copie de \mathbb{R}^2 isométriquement plongée. En particulier, pour tous points ν, ν', ν'' et $\delta > 0$ avec $|\nu, \nu'| = |\nu, \nu''| = \delta, |\nu', \nu''| = 2\delta$, il existe un point ν^\perp avec $|\nu, \nu^\perp| = \delta, |\nu', \nu^\perp| = |\nu'', \nu^\perp| = \sqrt{2}\delta$.

Cependant, prenons $\nu = \nu_{\text{id}, [\alpha]} \in \mathbf{X}$ avec $[\alpha] \in \nabla$ de multiplicité 1 dans un hyperplan admissible c qui ne passe par aucun sommet de ∇ (et qui par conséquent ne contient aucune droite dans la métrique $|\cdot, \cdot|$). Soit \mathbf{n} le vecteur normal à c en $[\alpha]$ orienté vers l'extérieur du demi-espace admissible L délimité par c , dans la métrique $|\cdot, \cdot|$. Pour $\beta = (\beta_i)$ avec $\beta_i = \log \alpha_i$ posons $\beta' = \beta + \delta \mathbf{n}$ et $\alpha'_i = \exp \beta'_i$, pour $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ venant du lemme 5.5(b). Soit $\nu' = \nu_{\text{id}, [\alpha']}$ et $\nu'' = \nu_{g, [\alpha']}$ pour un g qui fixe ν mais pas ν' (voir remarque 4.3). Puisque L est convexe, $|\nu', \nu''| = 2\delta$. Pourtant, l'intersection de la sphère de rayon $\sqrt{2}\delta$ centrée en ν' (resp. en ν'') avec la sphère de rayon δ centrée en ν est contenue dans $\mathbf{E}_{\text{id}} \setminus \mathbf{E}_g$ (resp. $\mathbf{E}_g \setminus \mathbf{E}_{\text{id}}$). Ainsi un ν^\perp comme plus haut n'existe pas.

BIBLIOGRAPHIE

- [AB08] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown, *Buildings. Theory and applications*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 248, Springer, 2008. ↑609, 616, 649
- [BFJ08] Sébastien Boucksom, Charles Favre, and Mattias Jonsson, *Valuations and plurisubharmonic singularities*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 2, 449–494. ↑609
- [BFL14] Cinzia Bisi, Jean-Philippe Furter, and Stéphane Lamy, *The tame automorphism group of an affine quadric threefold acting on a square complex*, J. Éc. Polytech., Math. **1** (2014), 161–223. ↑606, 645
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer, 1999. ↑626, 627, 629, 630, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 645
- [Bou68] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1337, Hermann, 1968. ↑616, 617
- [BT84] François Bruhat and Jacques Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. Fr. **112** (1984), no. 2, 259–301. ↑609, 624
- [BvdEW12] Joost Berson, Arno van den Essen, and David Wright, *Stable tameness of two-dimensional polynomial automorphisms over a regular ring*, Adv. Math. **230** (2012), no. 4-6, 2176–2197. ↑608, 610
- [DGO17] François Dahmani, Vincent Guirardel, and Denis V. Osin, *Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 245, American Mathematical Society, 2017. ↑606
- [FJ07] Charles Favre and Mattias Jonsson, *Eigenvaluations*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **40** (2007), no. 2, 309–349. ↑609, 611
- [FMJ02] Gene Freudenburg and Lucy Moser-Jauslin, *A nonlinearizable action of S_3 on \mathbf{C}^4* , Ann. Inst. Fourier **52** (2002), no. 1, 133–143. ↑608
- [GR08] Stéphane Gaussent and Guy Rousseau, *Kac-Moody groups, hovels and Littelmann paths*, Ann. Inst. Fourier **58** (2008), no. 7, 2605–2657. ↑609
- [Lam02] Stéphane Lamy, *Une preuve géométrique du théorème de Jung*, Enseign. Math. **48** (2002), no. 3-4, 291–315. ↑606
- [Lam19] ———, *Combinatorics of the tame automorphism group*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. **28** (2019), no. 1, 145–207. ↑631, 647, 648

- [LP19] Stéphane Lamy and Piotr Przytycki, *Acylindrical hyperbolicity of the three-dimensional tame automorphism group*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **52** (2019), no. 2, 367–392. ↑606, 607, 631, 647, 648
- [OS02] Bob Oliver and Yoav Segev, *Fixed point free actions on \mathbf{Z} -acyclic 2-complexes*, Acta Math. **189** (2002), no. 2, 203–285. ↑607
- [Pap14] Athanase Papadopoulos, *Metric spaces, convexity and non-positive curvature*, second ed., IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 6, European Mathematical Society, 2014. ↑625
- [Par00] Anne Parreau, *Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries*, Crystallographic groups and their generalizations, II. Proceedings of the workshop, Katholieke Universiteit Leuven, Campus Kortrijk, Belgium, May 26–28, 1999, Contemporary Mathematics, vol. 262, American Mathematical Society, 2000, pp. 263–302. ↑609, 624
- [Sus77] Andreĭ A. Suslin, *On the structure of the special linear group over polynomial rings*, Math. USSR, Izv. **11** (1977), 221–238. ↑608
- [Wri15] David Wright, *The generalized amalgamated product structure of the tame automorphism group in dimension three*, Transform. Groups **20** (2015), no. 1, 291–304. ↑631

Manuscrit reçu le 6 novembre 2019,
accepté le 29 juillet 2020.

Recommandé par l'éditeur S. Cantat.
Publié sous la licence CC BY 4.0.



Cette revue est membre du Centre Mersenne.



Stéphane LAMY
Institut de Mathématiques de Toulouse
UMR 5219, Université de Toulouse,
UPS F-31062 Toulouse Cedex 9, (France)
slamy@math.univ-toulouse.fr

Piotr PRZYTYCKI
Dept. of Math. & Stats.,
McGill University, Montreal,
Quebec, (Canada) H3A 0B9
piotr.przytycki@mcgill.ca